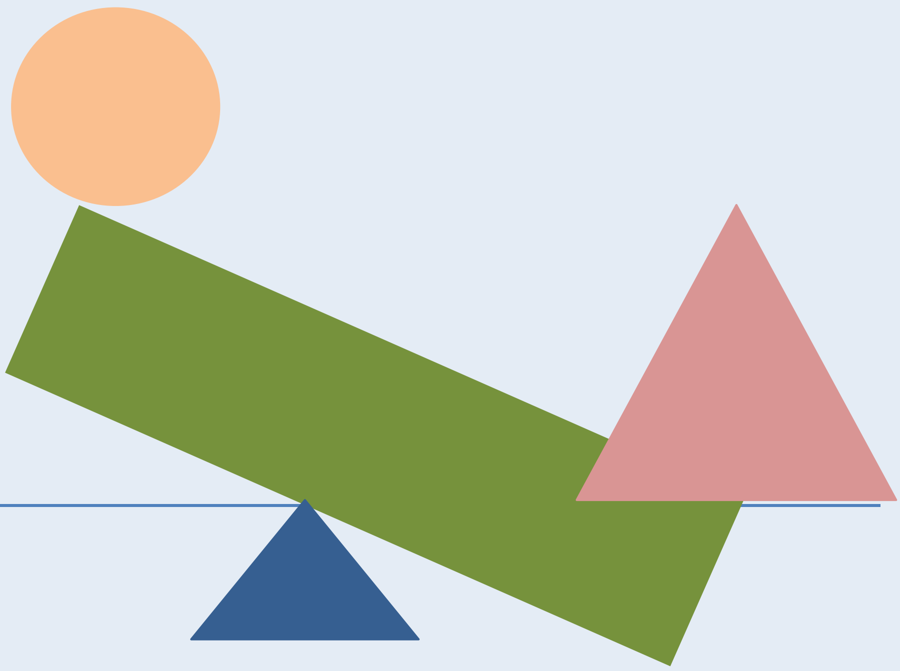
manuel de
SCIENCES PHYSIQUES

Terminales Scientifiques



1 Mécanique

Chapitre 1 : Cinématique

1- Repère d'espace- Repère de temps

Pour étudier le mouvement d'un point matériel, appelé mobile, il faut préciser deux repères :

1.1- Repère d'espace

Le repère d'espace est un repère d'observation attaché à un référentiel choisi. Il est représenté par l'un des repères cartésiens suivants : $(O,\vec{\imath})$ de coordonnée x, $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de coordonnées (x,y) et $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de coordonnées (x,y,z).

1.2- Repère de temps

Le repère de temps est constitué d'un instant origine correspondant au début du mouvement et d'une unité de temps : la seconde (s). Sa coordonnée t est appelée date représentant la valeur algébrique d'un instant.

$t>0$: pour un mouvement postérieur à l'instant origine de date $t=0$

$t<0$: pour un mouvement antérieur à l'instant origine de date $t=0$.

2- Repères de calcul

Les repères de calcul sont des repères dans lesquels on exprime le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\vec{v}$, et le vecteur accélération $\vec{a}$.

Ils peuvent être aussi utilisés pour projeter une relation vectorielle. C'est pourquoi, ils sont aussi appelés **repères de projection**.

2.1- Repère d'espace

Le repère d'espace est un repère fixe utilisé comme repère de calcul lorsque la trajectoire du mobile est rectiligne ou parabolique.

Le repère d'espace est à la fois repère d'observation et repère de calcul.

2.2- Repère de Frénet

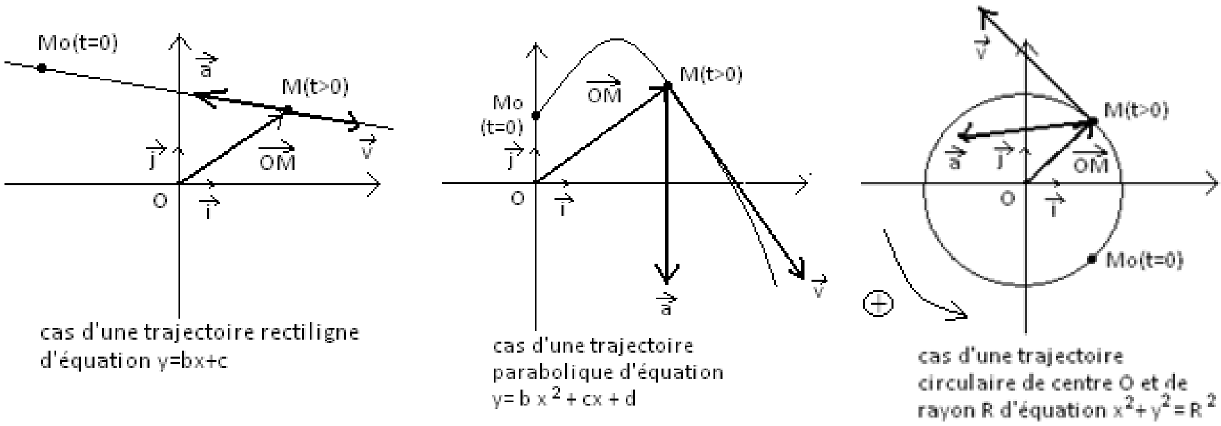
Le repère de Frénet est un repère orthonormé lié au mobile M et que l'on note par $(M,\vec{u},\vec{n})$.

$\vec{u}$: vecteur unitaire tangent à la trajectoire et toujours orienté suivant le sens positif choisi.

$\vec{n}$: vecteur unitaire normale à $\vec{u}$ et toujours orienté vers le centre de la trajectoire circulaire.

Il est utilisé comme repère de calcul lorsque la trajectoire du mobile est circulaire. Dans ce cas, le repère d'observation et le repère de calcul sont séparés.

3- Représentations des vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ selon la forme de la trajectoire.



4- Paramètres de position

Les paramètres de position permettent de repérer la position d'un point M à une date t.

4-1- Vecteur position $\overrightarrow{OM}$

<u>Dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$:</u> $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

- Si le point M est au repos dans $\mathcal{R}$, les coordonnées cartésiennes x et y sont indépendantes du temps.
- Si le point est en mouvement dans $\mathcal{R}$, les coordonnées x et y qui sont des fonctions du temps t représentent les équations horaires de son mouvement :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire du mobile est obtenue en cherchant une relation indépendante du temps entre x et y.

<u>Exemple</u> : dans le repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\overrightarrow{OM} = 2t\vec{i} + (-5t^2 + 4t)\vec{j}$

Equation horaire du mobile : $\begin{cases} x = 2t \\ y = -5t^2 + 4t \end{cases}$

Coordonnées du vecteur position à t=0 : $\overrightarrow{OM_0}\Big|_{y_0=0}^{x_0=0}$

Equation de la trajectoire :

$$\begin{cases} x = 2t \quad \Rightarrow t = 0{,}5x \\ y = -5t^2 + 4t \end{cases}$$

D'où $y = -5(0{,}5x)^2 + 4(0{,}5x)$ soit $y = -1{,}25x^2 + 2x$ (c'est l'équation d'une parabole dont la concavité tourne vers y<0)

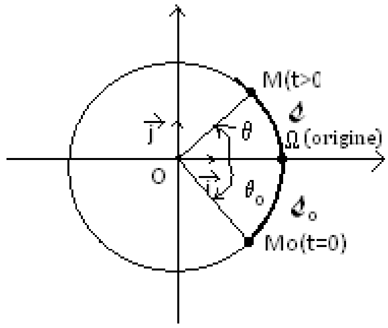
<u>Dans le repère de Frénet $(M,\vec{u},\vec{n})$</u> : $\overrightarrow{OM} = -R\vec{u}$ où R : rayon de la trajectoire circulaire.

4-2- Abscisse curviligne s et abscisse angulaire θ

Après avoir orienté la trajectoire circulaire et choisi sur celui-ci une origine Ω, on peut définir :

- L'abscisse curviligne du point mobile M : $s = \widehat{\Omega M}$ (à t=0, $s_0 = \widehat{\Omega M_0} < 0$)

- L'abscisse angulaire $\theta = (\widehat{\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OM}})$, exprimée en radians (rad) où $\overrightarrow{O\Omega}$ vecteur fixe et $\overrightarrow{OM}$ vecteur mobile (à t=0, $\theta_0 = (\widehat{\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OM_0}})$<0)



Loi horaire du mouvement : $s = s(t)$ ou $\theta = \theta(t)$

Relation entre s et θ : $s = R\,\theta$ où s et R en mètre et θ radian

5- Vecteur vitesse $\vec{v}$

5-1- Définition et caractéristiques

Par définition, le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point M en mouvement par rapport à un repère d'observation (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) attaché à un référentiel choisi est égal à la dérivée par rapport au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de ce point.

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Où $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}$ opérateur dérivée par rapport à **t.**

Le vecteur vitesse qui décrit la variation du vecteur position a les caractéristiques suivantes **:**

- Origine : position occupée par le mobile à la date **t**

- Direction : celle de la trajectoire rectiligne ou celle de la tagente à la trajectoire non rectiligne (parabolique ou circulaire)

- Sens : celui du mouvement

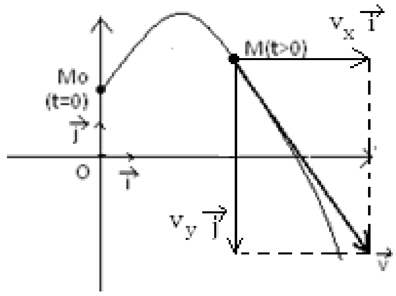
- Valeur : $\boldsymbol{v \geq 0}$ **en** $\boldsymbol{m.s^{-1}}$

5-2- Expression analytique

a) Dans le repère fixe $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$

$\vec{v} = \frac{d(x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath})}{dt}$ où $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ constants $\Rightarrow \vec{v} = v_x\,\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$

avec $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ en $m.s^{-1}$ *et* $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ en $m.s^{-1}$



La valeur $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \geq 0$

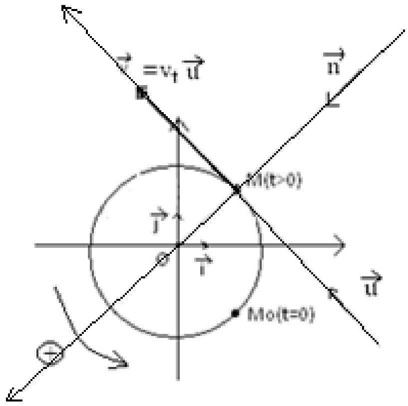
Exemple : $\overrightarrow{OM} = 2t\vec{\imath} + (-5t^2 + 4t)\vec{\jmath}$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

<u>Vecteur vitesse</u>

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Longrightarrow \vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath}$, or $\dot{x} = 2$ et $\dot{y} = -10t + 4$ *donc* $\boxed{\vec{v} = 2\vec{\imath} + (-10t + 4)\vec{\jmath}}$

<u>Valeur de $\vec{v}$ à une date t quelconque</u> : $\boxed{v = \sqrt{4 + (-10t + 4)^2}}$

A t=0, $v_0 = \sqrt{4+16}\ soit\ v_0 \approx 4{,}5 m.s^{-1}$



b) Dans le repère de Frénet $(M, \vec{u}, \vec{n})$

$\vec{v} = \dfrac{d(R\,\vec{n})}{dt}$ où $\vec{n}$ non constant $\Rightarrow \vec{v} = v_t \vec{u}$ où

$v_t = \pm v$: vitesse tangentielle exprimée en $m.s^{-1}$

(ici $v_t = v$ car le mouvement suit l'orientation de la trajectoire.

La valeur $v = |v_t| \geq 0$

Relation entre vitesse tangentielle v_t et vitesse angulaire $\dot{\theta}$

$s = R\,\theta$ par dérivation $\frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt}$ car R constant

Comme $\frac{ds}{dt} = \dot{s} = v_t\ et\ \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\ on\ a$

$v_t = R\,\dot{\theta}$ avec v_t en m.s^{-1}, R en m et $\dot{\theta}$ en rad.s^{-1}

6- Vecteur accélération $\vec{a}$

6-1- Définition et caractéristiques

Par définition, le vecteur accélération $\vec{a}$ à l'instant t d'un point M en mouvement dans le repère d'observation $(O, \vec{i}, \vec{j})$ lié à un référentiel choisi est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{v}$ à cet instant.

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt}$$

Que l'on note encore, puisque $\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$:

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \text{ où } \frac{d^2}{dt^2} \text{ : opérateur dérivée seconde par rapport à t.}$$

Le vecteur accélération qui décrit la variation du vecteur vitesse possède les caractéristiques suivantes :

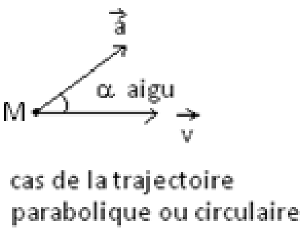
<u>Origine</u> : point occupé par le mobile à la date t.

<u>Direction</u> : celle de la trajectoire rectiligne ou toujours placé du côté concave de la trajectoire non rectiligne (parabolique ou circulaire).

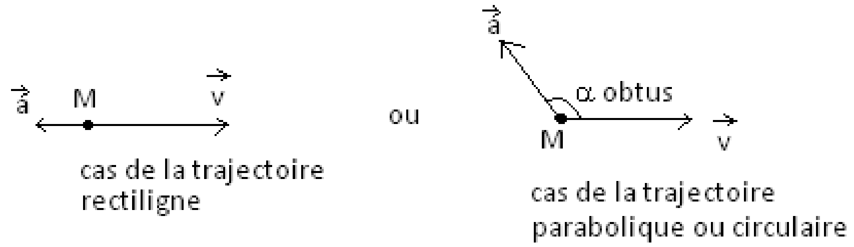
<u>Sens</u> :

- $\vec{v}$ et $\vec{a}$ de même sens si le mouvement est accéléré :

ou



- $\vec{v}$ et $\vec{a}$ de sens contraire si le mouvement est retardé :

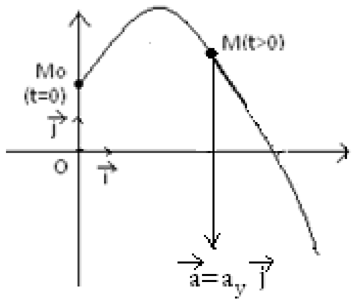


Valeur : $a \geq 0\ en\ m.s^{-2}$

6-2- Expression analytique

a) Dans le repère fixe $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$\vec{a} = \frac{d(v_x\vec{\imath}+v_y\vec{\jmath})}{dt}$ où $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *constants* $\Longrightarrow \boxed{\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}}$ avec $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}\ en\ m.s^{-2}$ et $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}\ en\ m.s^{-2}$



Exemple

Dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\vec{v} = 2\vec{\imath} + (-10t + 4)\vec{\jmath}$

$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} \Longrightarrow\ \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath}$ or $\frac{dv_x}{dt} = 0$ et $\frac{dv_y}{dt} = -10$ donc $\boxed{\vec{a} = -10\vec{\jmath}}$

Valeur de $a = 10m.s^{-2}$

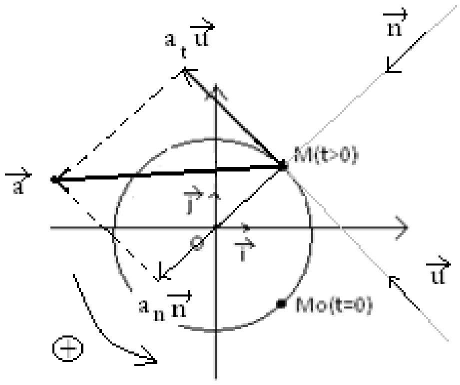
b) Dans le repère de Frénet $(\boldsymbol{M}, \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{n}})$

$\vec{a} = \frac{d(v_t\vec{u})}{dt}$ où $\vec{u}$ *non constant* $\Longrightarrow \boxed{\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n}}$

Avec $a_t = \frac{dv_t}{dt} = \ddot{s}\ en\ m.s^{-2}$: accélération tangentielle rendant compte de la variation de v.

$a_n = \frac{v^2}{R}\ en\ m.s^{-2}$: accélération normale rendant compte de la variation en direction de $\vec{v}$.

La valeur $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \geq 0$



7- Expression des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et position $\overrightarrow{OM}$

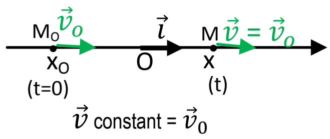
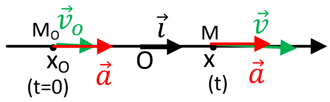
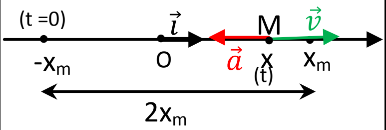
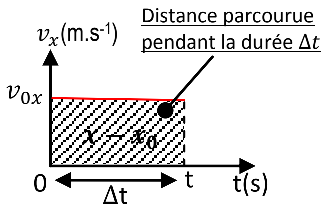
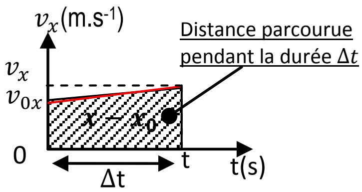
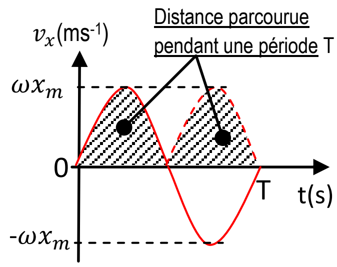
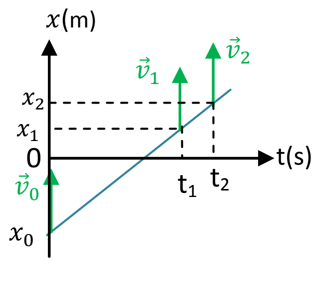
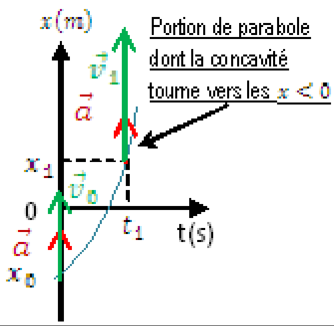
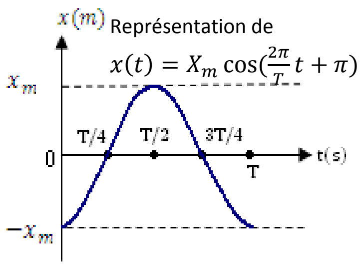
1^er cas : $\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\ constant}$ $\underset{\text{par dérivation}}{\overset{\text{par intégration}}{\rightleftarrows}}$ $\boxed{\begin{array}{c}\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ \vec{v} = \vec{a}t + \overrightarrow{v_0}\end{array}}$ $\underset{\text{par dérivation}}{\overset{\text{par intégration}}{\rightleftarrows}}$ $\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \overrightarrow{v_0}t + \overrightarrow{OM_0}}$

2^ème cas : $\boxed{\vec{a} = \vec{0}}$ $\underset{\text{par dérivation}}{\overset{\text{par intégration}}{\rightleftarrows}}$ $\boxed{\begin{array}{c}\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\ constant \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_0}\end{array}}$ $\underset{\text{par dérivation}}{\overset{\text{par intégration}}{\rightleftarrows}}$ $\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v_0}t + \overrightarrow{OM_0}}$

Les vecteurs constants $\overrightarrow{v_0}\ et\ \overrightarrow{OM_0}$ sont respectivement les vecteurs vitesse et position à t=0.

8- Etude de quelques mouvements

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ ont la même direction.

Nature du mouvement	mouvement rectiligne uniforme (m.r.u)	mouvement rectiligne uniformément varié m.r.u.v)	mouvement rectiligne sinusoïdal (m.r.s)
Définition	La trajectoire du mobile est une droite et sa vitesse v est constante.	La trajectoire du mobile est une droite et son vecteur accélération $\vec{a}$ est constante.	La trajectoire du mobile est un segment de droite et son équation horaire est une fonction sinusoïdale du temps.
xemple		 $\vec{a}$ constant et $\vec{v}$ de même sens : mouvement uniformément accéléré	 $\vec{a}$ non constant et $\vec{v}$ de sens contraires: mouvement retardé
équation horaire	$x = v_{0x}t + x_0$	$x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0$	$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$
Vitesse algébrique	$v_x\ cte = v_{0x}$	$v_x = a_x t + v_{ox}$	$v_x = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$ $v_x = 0$ pour $x = \pm x_m$ $v_x = \pm\omega x_m$ pour $x = 0$
Accélération algébrique	$a_x = 0$	$a_x = \text{cte}$	$a_x = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi)$ ou $a_x = -\omega^2 x$
Diagramme des vitesses: représentation graphique de v_x en fonction du temps t	 $x - x_0 = v_{0x}t$	 $x - x_0 = \frac{(v_{0x} + a_x t + v_{0x})t}{2}$ Pente : $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$	
Diagramme des espaces : représentation graphique de l'équation horaire			
Propriétés	Des distances égales sont parcourues pendant des durées égales	**Relation indépendante du temps :** $v^2 - v_0^2 = 2a_x(x - x_0)$	**Mouvement périodique** de période T (durée d'une oscillation) : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ **Fréquence** (nombre d'oscillations effectuées par seconde) : $N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ **Relation indépendante du temps :** $v^2 = \omega^2\,(x_m^2 - x^2)$

- **Pour le m.r.s**

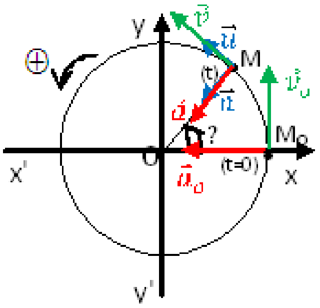
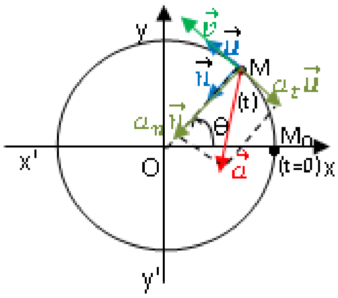
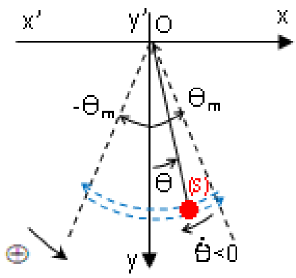
Les constantes x_m et φ sont déterminées par les conditions initiales (valeur et signe de x $et\dot{x}$ à t=0).
M effectue un mouvement de va- et- vient appelé oscillation ou vibration autour de la position d'équilibre O (centre de la trajectoire).
x : abscisse linéaire ou élongation en mètre ;ω : pulsation en rads^{-1} ;x_m : amplitude (ou élongation maximale)toujours positive et exprimée en mètre ;$\omega t+\varphi$ (en rad): phase à la date t ;φ (en rad): phase à date t=0.

- **Dérivées des fonctions compoées :**

$\frac{d\cos\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\text{x}\frac{d\cos\theta}{d\theta}$ avec $\theta=\omega t+\varphi$ et $\frac{d\cos\theta}{d\theta}=-\sin\theta$ $\frac{d\sin\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\text{x}\frac{d\sin\theta}{d\theta}$ avec $\theta=\omega t+\varphi$ et $\frac{d\sin\theta}{d\theta}=\cos\theta$

8-2. Les mouvements circulaires

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ n' ont la même direction.

Nature du mouvement	mouvement circulaire uniforme (m.c.u)	mouvement circulaire uniformémen varié (m.c.u.v)	mouvement ciculaire sinusoïdal (m.c.u)
Définition	La trajectoire du mobile est un cercle et sa vitesse v est constante.	La trajectoire du mobile est un cercle et son accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est constante.	La trajectoire du mobile est une portion de cercle et son équation horaire est une fonction sinusoïdale du temps.
Exemple	 $v=v_o$ mais $\vec{v}\neq\vec{v}_o$ et $a=a_o$ mais $\vec{a}\neq\vec{a}_o$	 $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ de signes contraires : mouvement uniformément retardé	 Pour des oscillations de faible amplitude (θ_m<10°), S est animé d'un mouvement
Abscisse Angulaire	$\theta=\omega t+\varphi$ où ω : vitesse angulaire	$\theta=\frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2+\dot{\theta}_0t+\theta_0$	$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi)$ où θ_m : amplitude du mouvement ; ω : pulsation, φ : phase initiale et ωt + φ : phase à la date t. θ_m et φ sont déterminés d'après les conditions initiales.
Vitesse angulaire	$\dot{\theta}=\omega=constante$	$\dot{\theta}=\ddot{\theta}t+\dot{\theta}_0$	$\dot{\theta}=-\omega\theta_m\sin(\omega t+\varphi)$ $\dot{\theta}=0$ pour $\theta=\pm\theta_m$ $\dot{\theta}=\pm\omega\theta_m$ pour $\theta=0$
Vecteur vitesse	$\vec{v}=v_t\vec{u}$ avec $v_t=R\dot{\theta}$ et R : rayon du cercle	$\vec{v}=v_t\vec{u}$ avec $v_t=R\dot{\theta}$ et R : rayon du cercle	$\vec{v}=v_t\vec{u}$ avec $v_t=l\dot{\theta}$ et l: $longueu\ du\ fil$
Accélération angulaire	$\ddot{\theta}=0$	$\ddot{\theta}=constante$	$\ddot{\theta}=-\omega^2\theta_m\cos(\omega t+\varphi)$ ou $\ddot{\theta}=-\omega^2\theta$

Vecteur accélération	$\vec{a} = a_n\vec{n}$ avec $a_n = R\omega^2$ $\vec{a}$ est centripète	$\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n}$ avec $a_t = R\ddot{\theta}$ et $a_n = R\dot{\theta}^2$	$\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n}$ avec $a_t = R\ddot{\theta}$ et $a_n = l\dot{\theta}^2$
Propriétés	***Période*** T: durée d'un tour $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ ***Fréquence*** N: nombre de tours effectués par seconde $N = \frac{1}{T}$	**Relation indépendante du temps** : $\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0)$	**Mouvement périodique** de période T (durée d'une oscillation) : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ **Fréquence** (nombre d'oscillations effectuées par seconde) : $N=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ **Relation indépendante du temps :** $\dot{\theta}^2 = \omega^2\ (\theta_m^2 - \theta^2\ )$

- **Pour le m.c.s**

  Les constantes θ_m et φ sont déterminées par les conditions initiales (valeur et signe de $\theta\ et\ \dot{\theta}$ à t=0).

M effectue un mouvement de va- et- vient, appelé oscillation ou vibration autour de la position d'équilibre verticale.

θ : abscisse angulaire ou élongation en rad; ω: pulsation en rads^{-1} ; θ_m : amplitude (ou élongation maximale)toujours positive et exprimée en rad ;$\omega t + \varphi$ (en rad): phase à la date t; φ (en rad): phase à date t=0.

- **Pour les oscillations de faible amplitude** ($\theta_m < 0{,}1745rad$: $\sin\theta(rad) \approx \theta\ et\ \cos\theta(rad) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

<u>Remarque</u>

Les résultats cinématiques sur le mouvement circulaire sont aussi valables pour le mouvement de rotation.

<u>**Exercice résolu 1 (mouvement rectiligne uniformément varié)**</u>

On lance une bille vers le haut dans une gouttière rectiligne inclinée. Dans un repère (O,$\vec{\imath}$), le mouvement est défini par :

$$\vec{a} = 2\vec{\imath}, \quad \vec{v}_0=-6\vec{\imath}, \quad x_o = 5\text{m}, \quad t \geq 0\text{s}.$$

L'axe ($x'x$,$\vec{\imath}$), parallèle à la gouttière, est orienté vers le bas.

1-Déterminer l'expression de la vitesse algébrique et l'équation horaire du mouvement.

2- En exploitant le diagramme des vitesses :

2.1 -étudier le mouvement de la bille le long de la gouttière,

2.2 -calculer la distance parcourue entre 0s et 5s.

3- Représenter le diagramme des espaces ainsi que les vecteurs vitesse et accélération aux dates t_1 = 1s et t_2= 5s

Solution

1- <u>L'expression de la vitesse algébrique</u>

$\vec{a} = 2\vec{\imath}$ constant $\Longrightarrow$ $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v_0}$

Suivant l'axe (x'x , $\vec{\imath}$): $v_x = a_x t + v_{0x}, d'où\ \boldsymbol{v_x = 2t - 6}$

<u>L'équation horaire du mouvement</u>

Primitive de v_x; $x = t^2 - 6t + x_0 = t^2 - 6t + 5\ soit\ \boldsymbol{x = t^2 - 6t + 5}$

2- Représentation du diagramme des vitesses

D'après la première question la vitesse algébrique de la bille est : v_x =2t+5

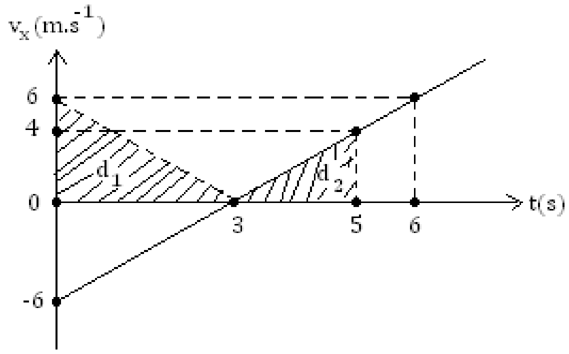


Tableau de valeurs

t(s)	0	3	5	6
$v_x(m.s^{-1})$	-6	0	4	6

2-1- Etude du mouvement de la bille

- t<3s ; $v_x = 2t - 6$ avec $v_x < 0$ et $a_x = 2 > 0$
  La bille est en mouvement rectiligne uniformément retardé en se déplaçant vers les x négatifs.
- t= 3s : la bille s'arrête au sommet de sa trajectoire rectiligne.
- t > 3s : $v_x = 2t - 6$ avec $v_x > 0$ et $a_x = 2$ >0.
  La bille est en mouvement rectiligne uniformément accéléré vers les x>0.

2-2- La distance parcourue entre 0 et 5s

La distance parcourue, notée D, entre 0 et 5 s est représentée par les aires hachurées des deux triangles rectangle.

L'aire représentant la distance parcourue d_1 entre 0et 3s est au dessus de l'axe des temps car $d_1>0$.

Ainsi $D = d_1 + d_2 = \left(\frac{3\times6}{2}\right) + \frac{\{5-3\times|6\}}{2}$ soit $\mathbf{D = 15m}$

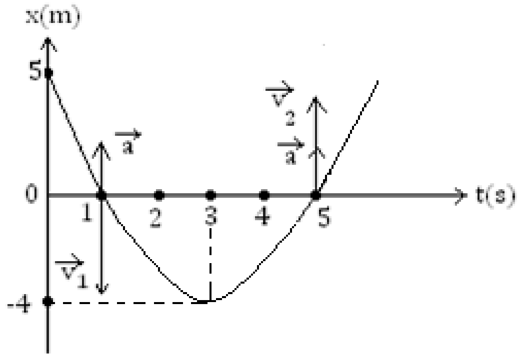
3- Représentation du diagramme des espaces

D'après la première question l'équation horaire du mouvement est :

$x = t^2 - 6t + 5$

Tableau de valeurs

t(s)	0	1	3	5
x(m)	5	0	-4	0



Représentation des vecteurs vitesse et accélération aux dates dates
$t_1 = 1s$ et $t_2= 5s$ sur le diagramme des espaces.

à $t_1 = 1s$: $v_{1x} = 2(1) - 6 = -4\ ms^{-1} \Longrightarrow \boldsymbol{v_{1x}} = -4\ ms^{-1}$
à $t_2 = 5s$: $v_{2x} = 2(5)\text{-}6 = 4\ ms^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{v_{2x}} = 4\ ms^{-1}$

D'après ces valeurs des vitesses algébriques , les vecteurs vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$sont représentés par des flèches de même longueur mais de sens contraire.

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant donc il est représenté par une flèche de longueur constante à chaque instant.

<u>Exercice résolu 2 (mouvement rectiligne sinusoïdal)</u>

Un mobile M est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal sur l'axe x'ox avec une fréquence N = 10Hz. A l'instant t = 0s, il passe par le point d'élongation x = $-2.\mathbf{10^{-2}\sqrt{3}}$ m avec la vitesse v = 0,4π m.s^{-1} en se déplaçant vers les x < 0.

1-Ecrire l'équation horaire du mouvement de M.

2-A quelle date et avec quelle vitesse passe-t-il pour la troisième fois par la position d'élongation x = 0 après t = 0s.

3-A l'instant t_o dont on ne calculera pas, il passe par l'élongation x = 1cm. Calculer son élongation 0,025s plus tard (deux solutions).

<u>Solution</u>

1- Equation horaire du mouvement de M

Cherchons l'équation horaire du mouvement de M sur x 'Ox, de la forme :

x (t) = $X_m \cos(\omega t + \varphi)$,

avec : $\omega = 2\pi N = 20\pi Hz$

x= $X_m\cos(\varphi) = -210^{-2}\sqrt{3} > 0$
et : $\dot{x}= -20\pi X_m \sin(\varphi) = -0{,}4\pi < 0$
On en déduit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_m\cos(\varphi) = -210^{-2}\sqrt{3} & (1) \\ x_m\sin(\varphi) = 210^{-2} & (2) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre , les deux relations (1) et (2) élevées au carré , on a :

$x_m^2\ (cos^2(\varphi)+sin^2(\varphi)) = 16.10^{-4} \Rightarrow x_m= 4.10^{-2}\ m$

D'après la relation (1), $\cos\varphi = \frac{-2.10^{-2}\sqrt{3}}{x_m} = \frac{-2.10^{-2}\sqrt{3}}{4.10^{-2}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ pour $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{-5\pi}{6}$

On choisit $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ afin que les deux relations (1) et (2) soient vérifiées en même temps.

Finalement :

$$\boldsymbol{x(t) = 4.10^{-2}.\cos\left(20\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)}$$

2- La date à laquelle M passe pour la troisième fois par la position d'élongation x = 0 après t = 0

$x(t) = 0 \Rightarrow x_m\cos(\omega t + \varphi) = 0\,\pi$

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ pour } \begin{cases} \omega t + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \omega t + \varphi = \frac{-\pi}{2} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comme $\dot{x}(t) > 0$ pour le passage de rang impaire par la position d'élongation $x = 0$, on choisit alors $\omega t + \varphi = \frac{-\pi}{2} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\frac{2\pi}{T}\mathrm{t} + \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi \Rightarrow t = \frac{-2}{3}T + k'T,\ k' = 1, 2, 3, \ldots$

Ainsi, pour le 3ème passage, k'=2 et t= $\frac{-2}{3}T + 2T \Rightarrow \boldsymbol{t = \frac{4T}{3}}$ (avec T $= \boldsymbol{\frac{1}{N}} = 0{,}1s$) soit **t = 0,13s**

La vitesse à la date $t = \frac{4T}{3}$:

$v\left(\frac{4T}{3}\right) = -\omega X_m \sin(-\frac{\pi}{2} + 2\pi)$

$v\left(\frac{4T}{3}\right) = \omega X_m = 20\pi \times 4.10^{-2}$ soit $\boldsymbol{v\left(\frac{4T}{3}\right) = 0{,}8\pi rad.s^{-1}}$

3- Calcul de l'élongation à 0,025s plus tard

A t=t_0 : x=1cm=10^{-2}m

$$4.10^{-2}\cos\left(20\pi t_0 + \frac{5\pi}{6}\right) = 10^{-2} \Longrightarrow \cos(20\pi t_0 + \frac{5\pi}{6} = 025$$

A t=t_0 +0,025: $x = 4.10^{-2}\cos\left(20\pi(t_0 + 0{,}025) + \frac{5\pi}{6}\right) = 4.10^{-2}\cos(20\pi t_0 + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2})$

$x = -4.10^{-2}\sin(20\pi t_0 + \frac{5\pi}{6})$ (3)

Comme $\sin\left(20\pi t_0 + \frac{5\pi}{6}\right) = \pm\sqrt{1 - cos^2(20\pi t_0 + \frac{5\pi}{6})}$

La relation (3) devient $x = \pm 4.10^{-2}\sqrt{1 - cos^2(20\pi t_0 + \frac{5\pi}{6})} = \pm 4.10^{-2}\sqrt{1 - (0{,}25)^2}$

Soit $\boldsymbol{x = \pm 3{,}9.10^{-2} m}$

EXERCICES

Exercice 1

Un point mobile M se déplace dans un plan muni du repère cartésien $(0,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$; ses coordonnées cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x = v_{ox}\mathrm{t} + x_o \\ y = \frac{1}{2}\, a_y \mathrm{t}2 + v_{oy}\mathrm{t} + y_o \end{cases}$$

1-Quelles sont les coordonnées de M à l'origine des dates ?

2-Exprimer les coordonnées de son vecteur vitesse.

3-Donner l'équation de sa trajectoire.

Tracer la trajectoire sachant que le mouvement commence à l'origine des dates et se termine à l'instant de date t'.

Données : $v_{ox} = 2{,}0\mathrm{m.s^{-1}}$; $x_o = 0$; $a_y = 6{,}0\mathrm{m.s^{-2}}$; $v_{oy} = 5{,}0\mathrm{m\ .s^{-1}}$; $y_o = 1{,}0\mathrm{m}$; t' = 10s

Exercice 2

Dans un repère cartésien $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, un point mobile M est animé d'un mouvement circulaire de centre 0, de rayon R = 2m à la vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{3}$ rad.s^{-1}.

1- Montrer que les coordonnées de M peut s'écrire x = R.cosωt et y = R.sinωt

En déduire la nature du mouvement projeté de M sur les axes $(x'x,\vec{\imath})$ et $(y'y,\vec{\jmath})$.

2-Quelle est l'équation de sa trajectoire ?

3-Exprimer son vecteur vitesse dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$et dans la base de Freinet $(\vec{u},\vec{n})$.

4-Calculer l'accélération tangentielle a_t et l'accélération normale a_n à la date t = 3s. Représenter $\vec{v}$ et $\vec{a}$ à la date t = 3s

Exercice 3

Les équations horaires (en unités S.I) du mouvement d'un mobile se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont :

$$\begin{cases} x = 3\mathrm{t} \\ \mathrm{y} = -4\mathrm{t}2 + 5\mathrm{t} \end{cases}$$

1- Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire et la représenter pour t ∈ [0s, 3s]

2- Quelles sont les coordonnées de son vecteur vitesse$\vec{v}$. En déduire ses caractéristiques lorsque le mobile passe par le point culminant.

3- Calculer l'abscisse du mobile lorsque celui-ci repasse par l'ordonnée y = 0.

4- Déterminer la valeur de sa vitesse à la date t = 2s. Représenter cette vitesse à la date considérée.

5- Quelles sont les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}$. En déduire sa valeur.

Exercice 4

Par rapport à un repère orthonormé $(0,\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, une particule M est soumise à l'accélération constante $\vec{a} = -9{,}8\vec{k}$. Cette particule se trouve à la date t = 0 en O, à la vitesse $\vec{v}_0 = 4\vec{\imath}$ (unités S.I).

On demande :

1 – les équations paramétriques du mouvement : $x(t), y(t), z(t)$;

2 – de donner l'expression de $\vec{v}_M(t)$ et de calculer la vitesse de M à la date t = 0,5s ;

3 – à quelle date M rencontre-t-il le plan z = −2 ?quelle est alors l'abscisse de M ?

Exercice 5

Reprendre l'exercice précédent avec, pour conditions initiales :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = -0.5 \end{cases}$$

Exercice 6

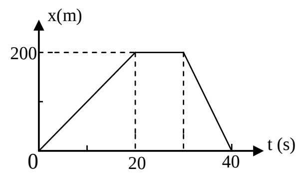
Un mobile décrit l'axe $x'Ox$ d'un mouvement uniforme. A t = 2s, il est à l'abscisse $x = 3$m. A l'instant t = 5s, il est à l'abscisse

$x = 15$m. Déterminer son équation horaire. Tracer le diagramme des vitesses et celui des espaces pour t ∈ [2s, 5s]. Quelle distance

a t-il parcourue entre t = 2s et t = 5s.

Exercice 7

Un mobile décrit une trajectoire rectiligne. Sa position par rapport à un point 0 de la trajectoire orientée est repérée à la date t par son abscisse x.



1- Préciser, en justifiant, la nature et le sens du mouvement du mobile durant les diverses étapes du trajet à partir du diagramme des espaces (figure ci-contre).

2- Écrire l'équation horaire du mouvement pour chaque étape.

3-Représenter les vecteurs vitesses du mobile aux dates $t_1 = 10$s, $t_2 = 15$s, $t_3 = 25$s et $t_4 = 35$s.

Exercice 8

Un mobile est animé d'un M.R.U dans un plan muni d'un repère $(0,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé. Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}_o$ sont :

$$\begin{cases} v_{ox} = 4\text{m.s}^{-1} \\ v_{oy} = 8\text{m.s}^{-1} \end{cases}$$

Déterminer les équations horaires du mouvement du point mobile et l'équation de la trajectoire sachant qu'à t = 0s, le mobile occupe la position M_o de coordonnées $x_o = 4$m et $y_o = -2$m.

Exercice 9

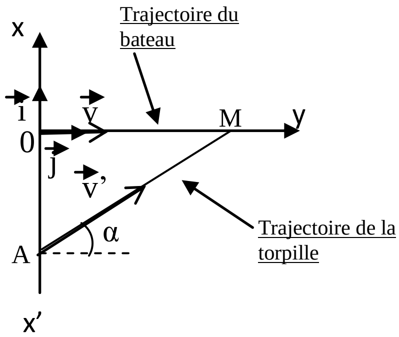
A la date t = 0, un mobile M est en un point de cordonnées x_o = 4,0m, y_o = -1,0m. Il est animé d'un mouvement rectiligne uniforme dans un plan muni d'un repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$. Les coordonnées de son vecteur vitesse, à chaque instant, sont :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = 2.0\mathrm{m.s^{-1}} \\ v_y = -3.0\mathrm{m.s^{-1}} \end{cases}$$

1-Calculer la vitesse υ du mobile.
2-Donner les équations paramétriques de son mouvement. En déduire l'équation de sa trajectoire et la représenter pour t ∈ [0s, 3s].

Exercice 10

Un bateau est en mouvement rectiligne uniforme à la surface de la mer avec le vecteur vitesse $\vec{v}$. Un sous-marin, immobile à la hauteur h sous la surface, tire une torpille en A à la date t = 0s lorsque le bateau passe juste au-dessus de lui en 0 (voir figure ci-contre). On suppose que le mouvement de la torpille est rectiligne uniforme avec le vecteur vitesse $\vec{v}'$ .On assimile les trois solides à des points.



1-Déterminer les coordonnées de $\vec{v}$ et de $\vec{v}'$ dans le repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$. En déduire :

2-les équations x(t) et y(t) du bateau ;

3-les équations horaires x'(t) et y'(t) de la torpille.

4-Déterminer l'angle α entre $\vec{v}'$ et l'horizontale pour que la torpille atteigne le bateau en M.

5-Calculer alors la date du choc et les distances parcourues par les deux corps en mouvement.

Données : v = 5m.s^{-1} ; v' = 10m.s^{-1} ; h = 50m.

Exercice 11

Un solide, assimilé à un point, est en mouvement rectiligne uniforme et parcourt les 100m en 4s. Il aborde une pente inclinée et son mouvement devient uniformément retardé avec une accélération de 5m.s^{-2}.

1-Déterminer sa vitesse initiale au bas de la pente.

2-Calculer la durée de la montée jusqu'à l'arrêt.

3-Quelle distance aura-t-il parcourue sur la pente ?

Exercice 12

L'équation horaire d'un point mobile M animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié le long d'un axe $(x'x,\vec{\imath}\,)$ est :$x = t^2 - 4t + 3$ avec t ≥ 0s où x en mètres et t en secondes.

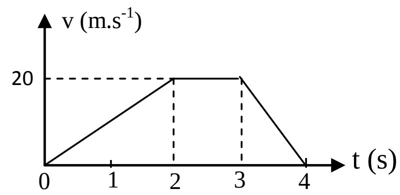
1-Donner l'expression de sa vitesse algébrique v_x , de son accélération algébrique a_x et de son accélération a.

2-Tracer le diagramme des vitesses.

3-Sur quels intervalles de temps le mouvement est-il retardé ?accéléré ?

Exercice 13

Le diagramme temporel de vitesse d'un point, décrivant une trajectoire rectiligne suivant le sens de l'axe du repère $(O,\vec{\imath})$, est donné par la figure ci-contre.



1-Préciser la nature du mouvement pour chacune des phases.

2-Calculer la distance totale parcourue entre les dates 0s et 4s.

3-Déterminer l'équation horaire de son mouvement pour chaque phase. Sachant qu'à t = 0s, le point mobile se trouve au point d'abscisse -3m du repère.

4-Représenter le diagramme des espaces dans le système d'axes (0t, $0x$).

Exercice 14

Un point mobile se déplace sur une droite munie du repère $(0,\vec{\imath})$. Il part de l'origine 0 à la date t = 0s. La valeur algébrique $v_x$de sa vitesse en fonction du temps est donnée ci-contre.

1-Donner la nature et le sens du mouvement pour chaque phase en les justifiant.

2-Représenter la loi horaire de l'abscisse x(t) du mobile.

3-A quelle date repassera-t-il par l'origine ?

4-Calculer la distance parcourue pendant 4s.

Exercice 15

Dans le repère vertical ascendant $(0,\vec{k})$, une bille assimilable à un point matériel est lancée verticalement avec la vitesse $\vec{v}_o = 6\vec{k}$ du point 0, origine des espaces. Elle est soumise à l'accélération $\vec{a} = -10\vec{k}$.

1- Quelle est la trajectoire de la bille et quelle est la nature de son mouvement ?

2- A quelle date t_1 et en quel point H_1, la bille s'arrête-t-elle ?

3- A quelle date t_2 repasse-t-elle à l'origine 0 ? Quel est alors son vecteur vitesse$\vec{v}_2$?

4-Préciser les phases de son mouvement pour t ≥ 0s.

Exercice 16

Une auto roule sur une route horizontale rectiligne de longueur L. Le mouvement comporte trois phases :

-1ère phase : mouvement uniformément accéléré de durée 5s à partir du repos du point A jusqu'au point B.

-2ème phase : mouvement uniforme sur une distance BC = 100mpendant 10s.

-3ème phase : mouvement uniformément retardé de durée 10s jusqu'à l'arrêt au point D.

1- Ecrire les équations donnant la vitesse v du mobile en fonction du temps t et les équations horaires des trois phases en prenant comme origine des temps l'instant de départ en A et origine 0 de l'axe le point A. Déterminer L.

2- Tracer sur un même graphique les diagrammes des espaces, des vitesses et des accélérations du mobile.

Exercice 17

Un mobile se déplace dans un plan. Soit un repère cartésien $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé lié à ce plan. Avec les unités du système international, les équations horaires du mouvement du mobile M sont : $x = 5t$ et $y = 2t^2 + 4$.

1- Donner l'équation de la trajectoire et la représenter pour $t \in [0s, 3s]$

2- Déterminer la nature du mouvement et les vecteurs vitesse et accélération du mobile.

Représenter les vecteurs vitesses aux dates 0s, 1,5s et 3s.

Calculer la vitesse et l'accélération à la date t = 1,5s.

Exercice 18

On lance une bille vers le haut dans une gouttière rectiligne inclinée. Dans un repère $(O,\vec{\imath})$, le mouvement est défini par :

$$\vec{a} = 2\vec{\imath}, \quad \vec{v}_o = -6\vec{\imath}, \quad x_o = 5\text{m}, \quad t \geq 0\text{s}.$$

L'axe $(x'x,\vec{\imath})$, parallèle à la gouttière, est orienté vers le bas.

1-Déterminer l'expression de la vitesse algébrique et l'équation horaire du mouvement.

2- En exploitant le diagramme des vitesses :

2.1 -étudier le mouvement de la bille le long de la gouttière,

2.2 -calculer la distance parcourue entre 0s et 5s.

3- Représenter le diagramme des espaces ainsi que les vecteurs vitesse et accélération aux dates $t_1 = 1s$ et $t_2 = 5s$

Exercice 19

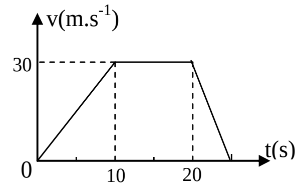
Un mobile est propulsé le long d'un axe $(x'x,\vec{\imath})$ avec une accélération constante $\vec{a} = 0{,}8\vec{\imath}$. A l'instant t = 0s, sa vitesse est

$\vec{v}_o = -20\vec{\imath}$ et son abscisse $x_o = -20$m.

1-Déterminer l'équation horaire de son mouvement.

2-A quelle date le mobile passe t-il par le point origine 0 de l'axe ?

Exercice 20



Un mobile décrit une trajectoire rectiligne muni du repère cartésien $(O,\vec{\imath})$. On a représenté sur la figure le diagramme des vitesses avec $v_x = v$.

- Caractériser le mouvement du mobile durant les diverses étapes du mouvement.

- Déterminer l'accélération algébrique, l'accélération et la distance parcourue pour chaque phase du mouvement.

Exercice 21

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal suivant l'axe $(x'x,\vec{\imath})$. Il évolue sur un segment de longueur 8cm avec une période T = 0,4s.

1 - Ecrire l'équation horaire de son mouvement sachant qu'à l'instant de date t = 0s, il passe par le point d'élongation -2cm en se déplaçant dans le sens croissant des élongations.

2 - A quel instant et avec quelle vitesse passe-t-il pour la première fois par sa position d'équilibre d'abscisse nulle ?

3 - A quel instant et avec quelle vitesse passe-t-il pour la troisième fois par le point d'élongation +2cm ?

Exercice 22

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal. L'axe $x'x$est le support de la trajectoire. L'origine O est le centre du mouvement. La période du mouvement est T = 2,0s. A l'instant choisi pour origine des dates, l'abscisse du mobile est x_0 =1,2cm, sa vitesse est nulle.

1- Déterminer l'équation horaire du mouvement.
2- Quelle est la vitesse maximale du mobile ?
3- Quelle est l'accélération maximale du mobile ? En quels points est-elle maximale ?
4- Calculer l'abscisse du mobile, sa vitesse et son accélération à l'instant de date t = 1,5s.

Exercice 23

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation horaire :

$x = 0{,}02\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ où x est mesuré en mètre, t en seconde.

1 – Quelle est la période du mouvement ?

2 – Quelle est la vitesse maximale du mobile ?

3 – A quelles dates sa vitesse est-elle égale à 0,10m.s^{-1}, le mobile se déplaçant dans le sens négatif ?

4 – Quelle est l'accélération au point d'abscisse : $x = 0{,}010m$.

Exercice 24

Un cycliste roule à vitesse constante égale à 40km.h^{-1} sur une piste circulaire de rayon R = 500m.

1-Quelle est la période du mouvement ?

2-Calculer son accélération.

Exercice 25

Un volant de rayon R = 2m tourne autour d'un axe horizontal à l'aide d'une corde enroulée autour de la jante et munie d'une masselotte à son extrémité. La distance verticale parcourue par cette masselotte est donnée par l'équation : x = 4 t^2 + t où x en mètres et t en secondes.

Calculer la vitesse et l'accélération angulaires du volant en fonction du temps.

Exercice 26

A partir de la date t = 0s, un volant tournant à la vitesse constante de $3000 tr.mn^{-1}$, n'est plus entraîné par l'arbre moteur et s'arrête au bout de deux minutes. Le mouvement de rotation est supposé uniformément retardé.

1- Calculer l'accélération angulaire du volant.
2- Calculer le nombre de tours effectués pendant les deux minutes de son mouvement.

Exercice 27

A la date t, l'accélération angulaire du rotor d'un moteur est égale à $40\ rad.s^{-2}$ tandis que la vitesse angulaire vaut $30 rad.s^{-1}$.

Donner les expressions des vecteurs vitesses $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ d'un point M du rotor situé à 10cm de l'axe.

Exercice 28

Une roue, immobile au départ, est accélérée de telle sorte que sa vitesse angulaire croît régulièrement jusqu'à $120 tr.mn^{-1}$ en 1mn.

*Après avoir t*ourné un certain temps à cette vitesse, la roue est freinée régulièrement et il faut 5mn pour l'arrêter.

Le nombre total de tours étant de 1560, calculer la durée totale de rotation.

Exercice 29

Un volant partant de la vitesse nulle atteint la vitesse de $5 tr.s^{-1}$ après avoir effectué 25tr suivant un mouvement de rotation uniformément varié.
1-Calculer son accélération angulaire.
2-Calculer la durée de ce démarrage.

Exercice 30

Une particule se déplace sur un cercle suivant la loi $\theta = 4t^2 + 3t$ où θ est mesuré en radians et t en secondes.

1-Calculer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire de la particule au bout de 4s.

2-Si le rayon de cercle est 1,6m, calculer la vitesse v et l'accélération a à la même date.

Exercice 31

Un mobile M est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal sur l'axe y'oy avec une fréquence

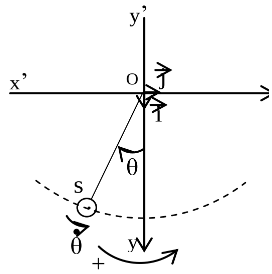
N = 10Hz. A l'instant t = 0s, il passe par le point d'élongation $y = -2.10^{-2}\sqrt{3}$ m avec la vitesse $v = 0{,}4\pi$ $m.s^{-1}$ en se déplaçant vers les $y < 0$.

1-Ecrire l'équation horaire du mouvement de M.

2-A quelle date et avec quelle vitesse passe-t-il pour la troisième fois par la position d'élongation $y = 0$ après t = 0s.

3-A l'instant t_o dont on ne calculera pas, il passe par l'élongation y = 1cm. Calculer son élongation 0,025s plus tard (deux solutions).

Exercice 32



Un pendule simple OS de longueur $l = 1$m est animé d'un mouvement de rotation sinusoïdale autour d'un axe (Δ) horizontal passant par O et perpendiculaire au plan muni du repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. La période de son mouvement est T = 2s. Son amplitude angulaire est $\theta_m = 0{,}2$rad.

1-Écrire son équation horaire sachant qu'à l'instant t = 0s, le pendule est abandonné sans vitesse à l'élongation angulaire $\theta_0 = 0{,}2$rad.

2-Donner les expressions de sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et de son accélération angulaire $\ddot{\theta}$

3-Avec quelle vitesse angulaire passe-t-il par sa position d'équilibre d'élongation $\theta = 0$rad, puis par la position d'élongation $\theta = 0{,}1$rad ?

4-Déterminer la vitesse v et l'accélération a de S à la position d'élongation 0,1rad.

Chapitre 2 : Dynamique

La dynamique étudie la relation entre forces et mouvement.

I. Dynamique d'un solide en translation

1- Mouvement du centre d'inertie d'un solide

1-1- Rappels

a- <u>Le mouvement de translation</u>

Définition

Un solide est en mouvement de translation ou, plus simplement, en translation par rapport à un référentiel choisi si tout bipoint de ce solide forme un vecteur dont la direction, le sens et la valeur ne changent pas au cours de son mouvement.

Propriétés

Tous les points d'un solide en translation :

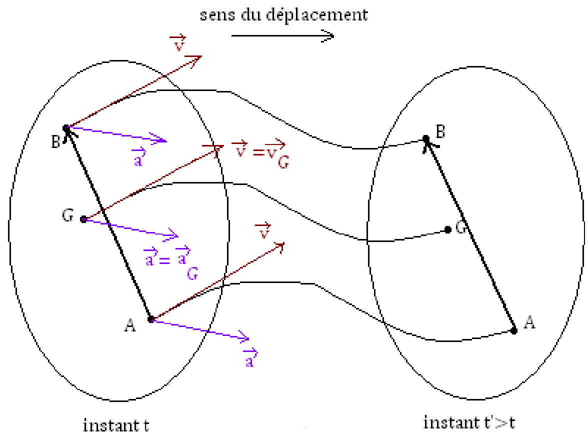
- décrivent des trajectoires parallèles et identiques,
- ont les mêmes vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ à chaque instant.

D'après ces propriétés, pour étudier le mouvement d'un solide en translation, il suffit d'étudier le mouvement de son centre d'inertie G.

Exemple :

G en mouvement rectiligne $\Longrightarrow$ solide en mouvement de translation $\Longrightarrow$ rectiligne

G en mouvement circulaire solide en mouvement de translation circulaire

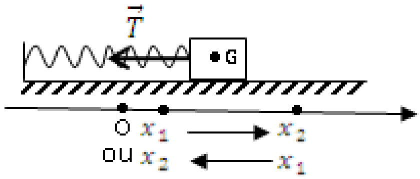


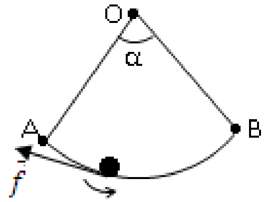
b- <u>Travail d'une force agissant sur un solide en translation</u>

Cas d'une force constante

- $\vec{F}\ constante \Longrightarrow \boldsymbol{w_{A\to B}^{(\vec{F})} = F.AB\cos\left(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{AB}}\right)}$ où $w_{A\to B}^{(\vec{F})}$ en joule (J); F (intensité de $\vec{F}$)en newton ; AB (distance parcourue) en mètre (m).
  - Si $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$ de même direction et de même sens alors la force $\vec{F}$contribue au mouvement et $w_{A\to B}^{(\vec{F})} = F.AB > 0$
  - Si $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$ de même direction mais de sens contraire alors la force $\vec{F}$s'oppose au mouvement et $w_{A\to B}^{(\vec{F})} = -F.AB < 0$
  - Si $\vec{F} \perp \overrightarrow{AB} ou\ \vec{v}$ alors $w_{A\to B}^{(\vec{F})} = F.AB = 0$ ($la\ force\ \vec{F}$ ne travaille pas).
- Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ constant pour une dénivellation h $<$ 10km $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{w_{A\to B}^{(\vec{P})}}$ = **mgh** (si le solide descend) ou **–mgh** (si le solide s'élève).

Cas d'une force non constante





$\vec{T} = -kx\vec{\imath}$: tension du ressort de raideur k en N.m-1

$W^{\vec{T}}_{x_1 \to x_2} = -\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2)$

$W^{\vec{f}}_{A\to B} = -f.\widehat{AB}$ où $\vec{f}$ force de frottement d'intensité constante et $\widehat{AB}$ arc de cercle de centre O et de rayon R.

Or $\widehat{AB} = R\alpha$ donc $W^{\vec{f}}_{A\to B} = -fR\alpha$

1-2- Position du centre d'inertie G d'un système de solides

a- <u>Relation barycentrique</u>

Soient les solides $S_1(G_1, m_1)$, $S_2(G_2, m_2)$, … et le système $S = \{S_1, S_2, …\}$ de masse $m_1 + m_2 + …$

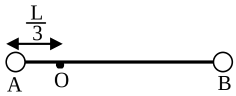
Le centre d'inertie G de S est le barycentre des centres d'inertie G_1, G_2, … auxquels sont concentrées les masses respectives m_1, m_2, … D'où G est défini par la relation barycentrique qui s'écrit avec une origine O quelconque :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \frac{\boldsymbol{m_1}\overrightarrow{\boldsymbol{OG_1}} + \boldsymbol{m_2}\overrightarrow{\boldsymbol{OG_2}} + \cdots}{\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2} + \cdots}$$

b- <u>Application :</u>

La projection de cette relation vectorielle permet de déterminer $\overline{OG}$ qui indique la position de G.

<u>**Exercice résolu 1**</u>



Une tige homogène de longueur 2L = 72cm et de centre d'inertie C a une masse m ; on place à ses extrémités deux masselottes A et B de masses respectives 2m et 3m. Déterminer la position du centre d'inertie G du système {tige, masselottes A et B} par rapport à O.

Solution

Le centre d'inertie du système {Tige, masselotte A et B} a une propriété barycentrique qui est traduite par la relation suivante : $\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OC}+2m\overrightarrow{OA}+3m\overrightarrow{OB}}{m+2m+3m} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{6}$

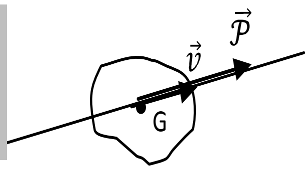
Par projection suivant l'axe AB orienté par $\overrightarrow{AB}$: $\overline{OG} = \frac{\overline{OC}+2\overline{OA}+3\overline{OB}}{6} = \frac{\frac{2L}{3}-\frac{L}{3}+3\left(L+\frac{2L}{3}\right)}{6}$

D'où : $\overline{OG} = \frac{5}{6}$L $= \frac{5}{6}(72)$ soit $\overline{\boldsymbol{OG}} = \boldsymbol{60\ cm}$: G est situé à 60 cm à droite de O.

1-3- Quantité de mouvement

a- <u>Définition</u>

Un solide de masse m en mouvement de translation avec une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel choisi possède la quantité de mouvement $\vec{p} = m.\vec{v}$ Sa valeur, $p = m.v$, est exprimée en kg.ms-1.



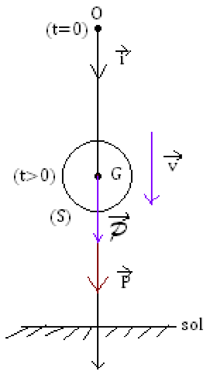
b- Lois de conservation

La quantité de mouvement d'un système de deux solides S_1 de masse m_1 et S_2 de masse m_2 participant à un choc se conserve en négligeant les frottements : $\underbrace{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}_{juste\ avant\ le\ choc} = \underbrace{m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2}_{juste\ après\ le\ choc}$

Si, de plus, le choc est élastique, c'est – à - dire que les deux solides se séparent après le choc, l'énergie cinétique de ce système se conserve aussi : $\underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2}_{juste\ après\ le\ choc} = \underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2}_{juste\ après\ le\ choc}$. Dans le cas d'un choc mou, c'est – à - dire que les deux solides sont accolés après le choc, il n'y a plus conservation de l'énergie cinétique du système.

1-4- Relation de dynamique $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}$

a- Cas d'un solide en chute libre sans vitesse initiale



Le solide (S) de masse m, en mouvement de chute libre sans vitesse initiale par rapport au référentiel terrestre, est soumis uniquement à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Vecteur vitesse de (S) : $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{g}}\mathbf{t}$

Sa quantité de mouvement : $\vec{\mathcal{P}} = m\vec{v} = m\vec{g}t$ **(4)**

La dérivée par rapport à t de la relation **(4)** donne : $\frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = m\vec{g} = \vec{p}$

D'où $\frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \vec{P}$ que l'on écrit souvent $\vec{\boldsymbol{P}} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}$ **dans le référentiel terrestre dit galiléen.**

b- Généralisation

Si un ensemble de forces de somme $\sum \vec{F}$, appliquées à un solide en mouvement de translation, provoque une variation de sa quantité de mouvement $\vec{\mathcal{P}}$, il existe une classe de **référentiels, dits galiléens**, dans lesquels est satisfaite la relation : $\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}$

c- Référentiel galiléen -Repère galiléen

- **Un référentiel galiléen**, ensemble de repères galiléens, est un référentiel dans lesquels sont satisfaites la relation $\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}$ et ses conséquences.
- **Exemples de repère galiléen :**

Le repère héliocentrique (son origine est le centre S du Soleil et ses axes se dirigent vers trois étoiles fixes lointaines) est un repère galiléen convenable pour étudier les mouvements des planètes et des sondes interplanétaires.

Le repère géocentrique (son origine est le centre T de la Terre et ses axes sont parallèles à ceux du repère héliocentrique), en mouvement de translation par rapport au repère héliocentrique, est considéré comme étant galiléen pour une durée assez courte de déplacement de son origine T. Il est utilisé pour l'étude du mouvement des satellites.

Le repère terrestre ou de laboratoire, entraîné par la terre dans son mouvement de rotation sur elle-même, peut être considéré comme galiléen pour des expériences n'ayant pas une trop grande durée.

- **Théorème**

Tout référentiel animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

Exercice résolu 2

Une petite sphère (S) de rayon négligeable, de masse m est accroché à un fil fin inextensible On le suspend au plafond d'un véhicule animé d'un mouvement de translation rectiligne horizontal, de vitesse $\vec{v}$ relativement à un repère terrestre $\mathfrak{R}$.

1- Pour *un mouvement uniformément accéléré*:

a- Appliquer la relation de dynamique à (S) dans le repère terrestre $\mathfrak{R}$.

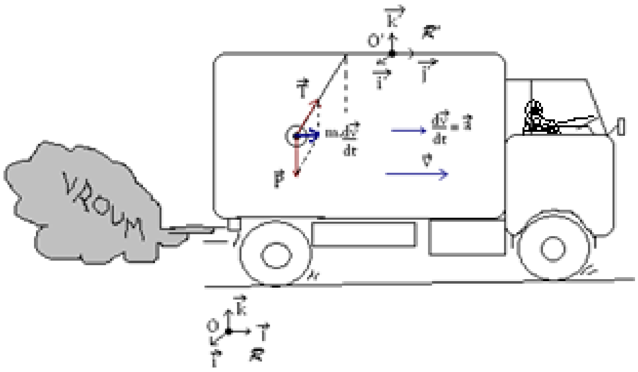
b- Cette relation peut-elle s'appliquer dans un repère $\mathfrak{R}'$ lié au véhicule ?

2- Mêmes questions pour un mouvement uniforme

Solution

1- Pour *un mouvement uniformément accéléré*:

a- Application de la relation de dynamique à (S) dans le repère terrestre $\mathfrak{R}$.



Inventaire des forces appliquées à (S) : poids $\vec{P}$ et tension *du fil*.

Dans le repère terrestre $\mathfrak{R}$ considéré comme étant galiléen :

$\vec{P}+\vec{T}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$ avec m constante

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{P}+\vec{T}=m\frac{d(\vec{v})}{dt}}$

pour $\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a}$ *et* $\vec{v}$ *de même sens*, le fil d'attache s'incline vers l'arrière (figure ci-contre).

b- Pour le système (S) , le bilan des forces est le même alors que , par rapport au repère $\mathfrak{R}'$ lié au véhicule, le fil est incliné.

Dans $\mathfrak{R}'$:

$\vec{v}'=\vec{0}$ et $m\frac{d\vec{v}'}{dt}=\vec{0}$

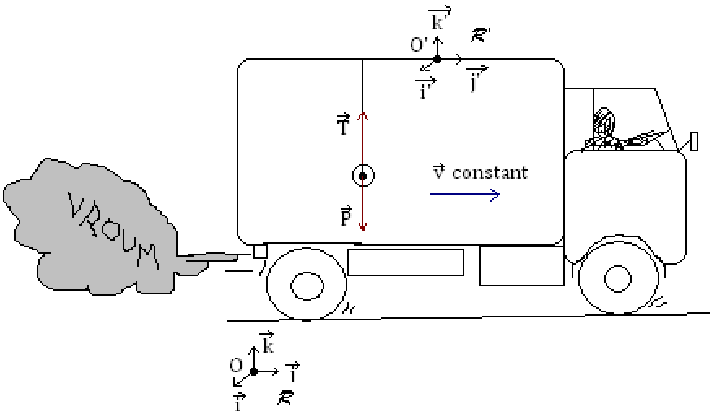
Alors que $\vec{P}+\vec{T}\neq\vec{0}$ (le fil s'incline)

La relation $\boldsymbol{\vec{P}+\vec{T}=m\frac{d(\vec{v})}{dt}}$ n'est donc pas applicable dans un repère $\mathfrak{R}'$ animé d'un mouvement accéléré par rapport au repère terrestre $\mathfrak{R}$ galiléen.

$\mathfrak{R}'$ n'est pas un rère galilén.

2- Pour un mouvement uniforme

a- Application de la relation de dynamique à (S) dans le repère terrestre $\mathfrak{R}$.



La petite sphère (S) est soumise à deux forces : le poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

Dans le repère terrestre $\mathfrak{R}$ considéré comme étant galiléen ; la relation de dynamique s'écrit :

$\vec{P}+\vec{T}=m\frac{d(\vec{v})}{dt}$ avec $\vec{v}=\vec{0}$ car (s) est en mouvement rectiligne uniforme

D'où $\boldsymbol{\vec{P}+\vec{T}=\vec{0}}$ **: (S) est en équilibre**

b- Le bilan des forces appliquées à (S) est le même

Dans le repère $\mathfrak{R}'$ lié au véhicule, (S) est immobile : $\vec{v}'=\vec{0}$ et $m\frac{d\vec{v}'}{dt}=\vec{0}$

En plus, $\vec{P}+\vec{T}=\vec{0}$ puisque le fil est vertical ⇒ (S) en équilibre

Donc la relation de dynamique $\boldsymbol{\vec{P}+\vec{T}=m\frac{d(\vec{v})}{dt}}$ est applicable dans un repère $\mathfrak{R}'$ animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport à un repère terrestre $\mathfrak{R}$ gzaliléen.

$\mathfrak{R}'$ est un repère galiléen.

1-5- Conséquences de la relation de dynamique $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}$

a- <u>Théorème du centre d'inertie (TCI)</u>

$\vec{\mathcal{P}} = m\vec{v}_G \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = m\frac{d\vec{v}_G}{dt}$ avec m constante d'où $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ **dans un référentiel galiléen**, avec $\vec{a} = \vec{a}_G$

<u>Remarques</u> :

- $\sum \vec{F}$ *et* $\vec{a}$ ont même direction et même sens.
- La relation vectorielle qui traduit le théorème du centre d'inertie est projetée :
  - suivant les axes du repère de Frénet si la trajectoire est circulaire ,
  - ou bien suivant les axes du repère d'observation si la trajectoire est rectiligne ou parablique.
  -

b- <u>Théorème de l'énergie cinétique (TEC)</u>

Le TEC qui est la forme intégrée de la relation de dynamique s'énonce comme suit :

Dan un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces appliquées au système de masse m.

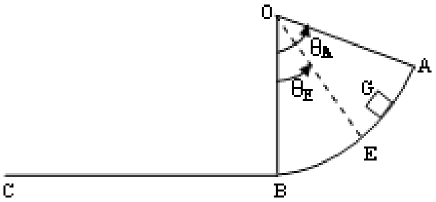
Dans un référentiel galiléen, $\boldsymbol{Ec_2 - Ec_1 = \sum W_{(1)\rightarrow(2)}^{(\vec{F})}}$ *avec* $Ec_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ *et* $Ec_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

fiche méthode 

COMMENT RESOUDRE UN PROBLEME DE DYNAMIQUE ?

1- Préciser le système étudié.
2- Choisir le référentiel qui doit être galiléen.
3- Inventorier les forces appliquées.
4- Faire un schéma clair en représentant les forces appliquées.
5- Appliquer le théorème du centre d'inertie ou le théorème de l'énergie cinétique (selon le cas)
6- Choisir un repère de calcul et expliciter les composantes des vecteurs.
7- Résoudre littéralement les équations obtenues et faire l'application numérique

Exercice résolu 3



Un objet G, assimilable à un point de masse m = 80 g, glisse sur une piste formée de deux parties, l'arc AB et le segment BC, situées dans un même plan vertical. L'arc AB de centre O a un rayon r = 1 m et BC est une partie rectiligne de longueur L = 50 cm. G part sans vitesse initiale du point A tel que $\boldsymbol{\theta_A} = \frac{\pi}{3}$

1-En négligeant les frottements, calculer la vitesse de G au point E tel que $\boldsymbol{\theta_E} = \frac{\pi}{6}$ puis calculer sa vitesse en B.

Quelle est l'intensité de la réaction $\vec{R}$ de la piste sur l'objet au point E ?

2-En fait, sur le trajet ABC, existent les frottements assimilables à une force $\vec{f}$ tangente à la trajectoire et d'intensité constante f.

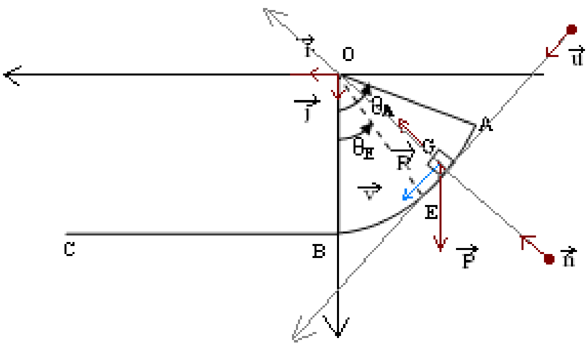
2.1 Si G s'arrête en C, quelle est la valeur de cette force de frottement $\vec{f}$?

2.2 Calculer son accélération sur le trajet BC.

On donne : g = 10 m.s^{-2}

Solution

1- La vitesse de G au point E en négligeant les frottements



Le système considéré qui est l'objet G est en mouvement par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen.

Il est soumis à deux forces: le poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ de la piste.

L'application du théorème de l'énergie cinétique (TEC) appliqué entre t_A et t_E s'écrit :

$Ec_E - Ec_A = W_{A\to E}^{\vec{P}} + W_{A\to E}^{\vec{R}}$

Or $Ec_E = \frac{1}{2}mv_E^2$; $Ec_A = 0 \; car \; v_A = 0$;

$W_{A\to E}^{\vec{P}} = mgh = mg(rcos\theta_E - rcos\theta_A) \Longrightarrow W_{A\to E}^{\vec{P}} = mgr(cos\theta_E - cos\theta_A)$; $W_{A\to E}^{\vec{R}}$ =0 car $\vec{R} \perp \vec{v}$

Donc, $\frac{1}{2}mv_E^2 = mgr(cos\theta_E - cos\theta_A) \Longrightarrow \boldsymbol{v_E} = \sqrt{\boldsymbol{2gr(cos\theta_E - cos\theta_A)}}$

Application numérique (**AN**): $v_E = \sqrt{2 \times 10 \times 0{,}50(cos\frac{\pi}{6} - cos\frac{\pi}{3})} \Longrightarrow \boldsymbol{v_E = 1{,}9m.s^{-1}}$

La vitesse de G au point B

L'expression de v_B est déduite de celle de v_E : $\boldsymbol{v_B} = \sqrt{\boldsymbol{2gr(cos\theta_B - cos\theta_A)}}$

AN : $v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 0{,}50(cos0 - cos\frac{\pi}{6})} \Longrightarrow \boldsymbol{v_B = 2{,}2m.s^{-1}}$

L'intensité de la réaction $\vec{R}$ au point E

Le théorème du centre d'inertie (TCI) s'écrit : $\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$

La trajet AB étant une portion de cercle, choisissons le repère de Frénet $(G, \vec{u}, \vec{n})$ comme repère de calcul.

Ainsi, la projection du TCI suivant l'axe orienté par $\vec{u}$ donne : $P_t + R_t = m.a_t$

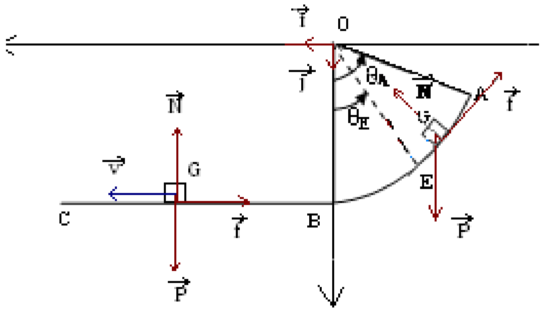
Or $P_t = -mgcos\theta_E, R_t = R \; , a_t = \frac{v_E^2}{r} = \frac{2gr(\cos\theta_E - \cos\theta_A)}{r} \Rightarrow a_t = 2g(\cos\theta_E - \cos\theta_A)$

Donc -mgcos θ_E + R = 2mg(cos θ_E − cos θ_A) ⇒ **R = mg.(3cos $\boldsymbol{\theta_E}$ − cos $\boldsymbol{\theta_A}$)**

AN : R = 0,080 × 10 (3 cos$\frac{\pi}{6}$ − 2 cos$\frac{\pi}{3}$) soit **R = 1,3N**

2) **Les frottements existent**

2.1- la valeur de la force de frottement $\vec{f}$



Forces appliquées au système S : le poids $\vec{p}$, la réaction normale $\vec{N}$ de la piste et la force de frottement $\vec{f}$.

Le TEC entre t_A et t_C *donne*:

$$Ec_c - Ec_A = W_{A\to C}^{(\vec{P})} + W_{A\to C}^{(\vec{N})} + W_{A\to C}^{(\vec{f})}$$

$$0 - 0 = W_{A\to B}^{(\vec{P})} + 0 + W_{A\to B}^{(\vec{f})} + W_{B\to C}^{(\vec{f})}$$

or $W_{A\to B}^{(\vec{P})} = mg(r - r\cos\theta_A) \Rightarrow W_{A\to B}^{(\vec{P})} = mgr(1-\cos\theta_A), W_{A\to B}^{(\vec{f})} = -fr\theta_A, W_{B\to C}^{(\vec{f})} = -fL$

donc $0 = mgr(1-\cos\theta_A) - fr\theta_A - fL \Rightarrow f(r\theta_A + L) = mgr(1-\cos\theta_A)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{mgr(1-\cos\theta_A)}}{\boldsymbol{r\theta_A + L}}$$

A.N : $f = \frac{0{,}080\times10\times0{,}50(1-\cos\theta_A)}{0{,}50\times\frac{\pi}{3}-1}$ soit $\boldsymbol{f = 0{,}20N}$

2.2- Calcul de son accélération a sur le trajet BC

Le bilan des forces appliquées à G est le même

Dans le repère terrestre considéré comme galiléen, le TCI s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Suivant l'axe orienté par $\vec{i}$: $P_x + N_x + f_x = ma_x$

or $P_x = 0$; $N_x = 0$; $f_x = -f$ et $a_x = -a$ car $\vec{v}$ et $\vec{a}$ de sens contraires

donc $-f = -ma \Rightarrow a = \frac{f}{m} = \frac{0{,}20}{0{,}080}$ soit $a = 2{,}5 m.s^{-2}$

2- Mouvement d'une particule soumise à une force constante

2-1- Etude dynamique

On s'intéresse à une particule soumise à une force unique constante $\vec{f}$.

Dans un référentiel galiléen, le théorème du centre d'inertie s'écrit ;

$$\vec{f} = m\vec{a}$$

où m est la masse de la particule et $\vec{a}$ son vecteur accélération.

La force $\vec{f}$ étant constante, l'accélération $\vec{a}$ de la particule est également constante et s'écrit :

$$\boldsymbol{\vec{a}} = \frac{\boldsymbol{\vec{f}}}{\boldsymbol{m}} \quad \text{soit} \quad \frac{\boldsymbol{d\vec{v}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{\vec{f}}}{\boldsymbol{m}}$$

$\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la particule.

2-2- Etude cinématique

a- Vecteur position

Par intégration de $\vec{v}$,on obtient :

$$\vec{v} = \frac{\vec{f}}{m}t + \vec{v}_0$$

où $\vec{v}_0$ est le vecteur vitesse de la particule à t = 0.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de la particule à la date t s'obtient à partir de :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\vec{f}}{m}t + \vec{v}_0$$

Par intégration, on obtient :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.\frac{\vec{\boldsymbol{f}}}{\boldsymbol{m}}.\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}}.\boldsymbol{t} + \overrightarrow{\boldsymbol{OM}_{\mathbf{0}}}$$

où $\overrightarrow{OM_0}$ est le vecteur position à t = 0.

b- Forme de la trajectoire

$\vec{v}_0 = \vec{0}$ ou $\vec{v}_0 \parallel \vec{a}\ constant$ ⇒ la trajectoire de la particule est rectiligne

$\vec{v}_0 \nparallel \vec{a}\ constant$ ⇒ la trajectoire de la particule est parabolique

2-3- Etude énergétique

- L'énergie mécanique de la particule à chaque instant est : **E = Ec + Ep**

où Ec son énergie cinétique et Ep son énergie potentielle.

- Si les frottements dûs à l'air ou au support sont négligeables (forces extérieures) sont négligeables alors E constantes.
- Expression l'énergie cinétique : $\mathbf{Ec} = \frac{1}{2}\boldsymbol{mv}^{\mathbf{2}}$

où m est la masse de la particule et $v\ sa\ vitesse$.

- Expression de l'énergie potentielle :

E constante ⇒ $E_M = E_R$ où M est la position considérée et R est la position de référence.

$Ec_M + Ec_M = Ec_R + Ep_R \Rightarrow Ep_M - Ep_R = Ec_R - Ec_M$

Comme $Ep_R = 0\ et\ Ec_R - Ec_M = \sum W_{M\to R}^{(\vec{F}_{int})}$

On a: $\boldsymbol{Ep_M} = \sum \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{M\to R}}^{(\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{int}})}$

2-4- Applications

a- Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme

Un projectile est un solide en chute libre

Caractéristiques de $\vec{g}$ uniforme

Direction : la verticale

Sens : toujours vers le bas

Valeur : g ≈ 9; 80 $m.s^{-2}$ (la valeur de $\vec{g}$ est sensiblement constante tant que l'altitude est inférieure à 10 km).

Force appliquée

Un projectile est uniquement soumis à son poids $\vec{P}$ constant.

Vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m} = \frac{m\vec{g}}{m} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{g}}\ \boldsymbol{constant}$$

Forme de la trajectoire selon la condition initiale

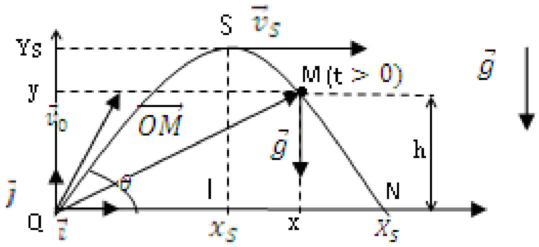
- $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ou $\vec{v}_0 \parallel \vec{g}\ cst$ ⇒ la trajectoire du projectile est rectiligne. Exemple : la Bille en chute libre sans vitesse initiale ou lancée verticalement décrit une trajectoire rectiligne.
- $\vec{v}_0 \nparallel \vec{g}\ constant$ ⇒ la trajectoire du projectile est parabolique. Exemple : Une boule lancée par un athlète possède décrit une trajectoire parabolique.

Vecteur position :

$$\vec{a} = \vec{g}\ constant \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{t^2} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{t} + \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_{\boldsymbol{0}}$$

Equations horaires

Les expressions des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$, dans le repère $(O\ ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, donnent les équations horaires du mouvement du projectile.



D'après l'expression des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$:

$\binom{x}{y} = \frac{1}{2}\binom{0}{-g}t^2 + \binom{v_0 cos\theta}{v_0 sin\theta}t + \binom{0}{0}$

D'où les équations horaires du mouvement du projectile:

$x = v_0 cos\theta t$
$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\theta t$

Le mouvement projeté du projectile est uniformément varié sur l'axe Oy et uniforme sur l'axe Ox.

Équation de la trajectoire

- **Expression**

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminat t des équations horaires :

$x = v_0 \cos\theta . t \quad \Longrightarrow \quad t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$

On peut maintenant exprimer y en fonction de x en remplaçant t par la valeur trouvée ci-dessus on a donc :

$y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0.cos\theta}\right)^2 + v_0.\sin\theta\left(\frac{x}{v_0.cos\theta}\right)$ avec

En simplifiant, on trouve finalement :

$$\mathbf{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2cos^2\theta}x^2 + tan\theta.x}$$

La trajectoire est parabolique et $\vec{a}$ constant : le mouvement du projectile est un mouvement parabolique uniformément varié par rapport au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

- **Caractéristiques de la trajectoire parabolique**

Lorsque les points de départ et d'arrivée se trouvent au même niveau, la trajectoire du projectile est caractérisée par la flèche et la portée.

  - **La flèche** IS de la trajectoire est la **hauteur maximale Y_S atteinte** par le projectile.
    Détermination de Y_S par la relation indépendante du temps :

$$v_{Sy}^2 - v_{Sy}^2 = 2a_y(y_s - y_O) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \text{ -- } v_0^2\, sin^2\theta = 2(\text{-g})(y_S - 0)$$

$$\boldsymbol{y_S = \frac{v_0^2 sin^2\theta}{2g}}$$

  - **La portée** ON du projectile est la **distance horizontale X_S séparant le point de lancement O et le point de chute N** sur le sol
    Détermination de $\boldsymbol{X_S}$ par l'utilisation des équations horaires.

L'ordonnée au point de chute est nulle.

$Y_N = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}gt_N^2 + (v_0 sin\theta).t_N = 0$

D'où $t_N = \frac{2v_0 sin\theta}{g}$

On insère l'expression de t_N dans l'équation x(t) :

$X_N = v_0 cos\theta \times \frac{2v_0 sin\theta}{g} = \frac{2{v_0}^2 cos\theta sin\theta}{g}$ avec $2cos\theta sin\theta = \sin 2\theta \Rightarrow \boldsymbol{X_N = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$

Energie potentielle

Système {Projectile, Terre) }

Pour le système considéré le poids devient une force intérieure donc l'énergie potentielle du projectile au point M est détermine par la relation

$$\mathbf{Ep_M} = \boldsymbol{W^{\vec{P}}_{M\to N}}$$

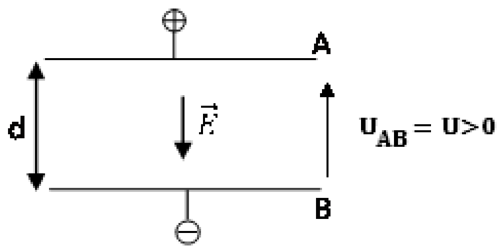
Si N est un point appartenant à la position de référence, alors $Ep_M = mgh$

b- MOUVEMENT D'UNE PARTICULE ELECTRISEE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE $\vec{E}$ UNIFORME

Exemple de particule électrisée : ion, électron, proton.

Caractéristiques de $\vec{E}$ uniforme

Le vecteur champ électrique $\vec{E}$, obtenu entre les deux plaques chargées A et B sous une tension U_{AB}, possède les caractéristiques suivantes :



- Direction: perpendiculaire aux deux plaques
- Sens : orienté de A (+) vers B (-) (ses du potentiel décroissant)
- Norme : E $=\frac{U}{d}$, avec d : distance qui sépare les deux plaques.

Force appliquée

Dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme, une particule de charge q, est soumise à la seule force électrique constante $\vec{F} = q\vec{E}$ ($\boldsymbol{\vec{F} \parallel \vec{E}}$):

Le poids de la particule est négligeable devant cette force

Vecteur accélération

$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}\ constant\ (\vec{a} \parallel \vec{E}\ )}$ avec m est la masse de la particule électrisée.

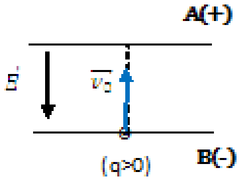
Si q >0 alors $\vec{a}$ et $\vec{E}$ ou $(\overrightarrow{F\ et\ E})$ ont même sens ;

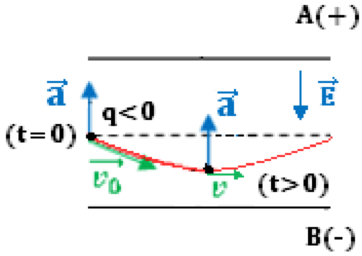
Si q<0 alors $\vec{a}$ et $\vec{E}$ ou ($\vec{F}\ et\ \vec{E}$) sont de sens contraires.

Forme de la trajectoire selon la condition initiale

- $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ou $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}\ cst \Rightarrow$ la trajectoire de la particule électrisée est rectiligne.
- $\vec{v}_0 \nparallel \vec{g}\ constant \Rightarrow$ la trajectoire de la particule électrisée est parabolique.

<u>Exemples :</u>





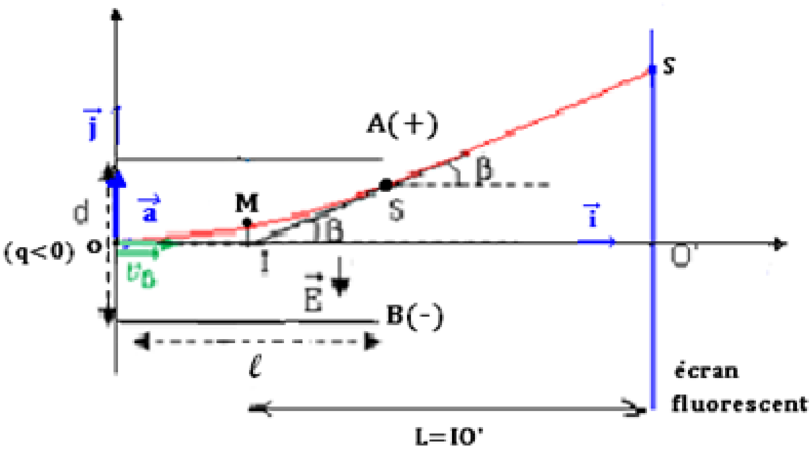
$\vec{v_0} \parallel \vec{E}$ *constant*: Trajectoire rectiligne

$\vec{v_0} \nparallel \vec{E}$ *constant* :Trajectoire parabolique

Vecteur position :

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}\ constant \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2m}}\vec{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{t}^2 + \vec{\boldsymbol{v}}_0\boldsymbol{t} + \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}_0$$

Equations horaires dans les cas où $\vec{v_0} \perp \vec{E}$



La date origine t =0 est choisie au moment où la particule de charge q<0 pénètre dans le champ électrique $\vec{E}$ au point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$.
La projections du vecteur position$\overrightarrow{OM}$, suivant les axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, donne les équations horaires du mouvement de la particule électrisée:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{y} = -\dfrac{\boldsymbol{q}.\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{2m}}\boldsymbol{t}^2 \end{cases}$$

Le mouvement projeté de la particule électrisée est uniformément varié sur l'axe Oy et uniforme sur l'axe Ox.

Équation de la trajectoire

- **Expression**

En éliminant t, entre les équations horaires, l'équation cartésienne de la trajectoire s'écrit :

$$\boldsymbol{y = -\frac{q.E}{2m}x^2}$$

La trajectoire est parabolique et $\vec{a}$ constant : le mouvement de la particule électrisée est un mouvement parabolique uniformément varié par rapport au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

- **Caractéristiques de la trajectoire parabolique**

Lorsque $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$, la trajectoire de la particule électrisée est caractérisée par la **déviation électrique $\boldsymbol{\beta}$** et la **déflexion électrique.**

- **La déviation électrique $\boldsymbol{\beta}$.**

L'angle β, entre les tangentes à la trajectoire parabolique en O et S, détermine la déflexion électrique subie par la particule électrisée:

La relation permettant de déterminer β est obtenue en déterminant la pente de la tangente à la trajectoire au point de sortie S :

$\tan\beta = (\frac{dy}{dx})_S = (-\frac{qE}{m}.x_S$ avec $E = \frac{U}{d}$ et $x_S = l$ (longueur de la plaque), il vient :

$$\boldsymbol{\tan\beta = -\frac{ql}{m.v_0^2 d}.U}$$

- **La déflexion électrique : O'S' = Y**

Sur l'écran, à la distance L de I (centre du condensateur), un faisceau de particules électrisée subit le déplacement O'S' = Y_S, appelé déflexion électrique.

Dans le triangle rectangle IO'S, $\tan\beta = \frac{O'S}{IO'} = \frac{Y}{L} \Longrightarrow Y = L\tan\beta = -\frac{Lql}{mv_0^2 d}.U$

Soit $$\mathbf{Y = -\frac{Lql}{mv_0^2 d}.U}$$

La déflexion électrique Y est proportionnelle à la tension U aux bornes des deux plaques chargées.

Energie potentielle

Système {particule de charge q, deux plaques chargées}

Pour le système considéré, la seule force électrique appliquée à la particule électrisée est une force intérieure donc **l'énergie potentielle électrique de la particule de charge q au point M** de la région où règne $\vec{E}$ uniforme est déterminée par la relation : $\boldsymbol{Ep_M = W_{M\to R}^{(\vec{F})}}$

avec R un point de potentiel nulle ($V_R = 0$) appartenant au plan où l'énergie potentielle électrique est nulle (Ep=0 à la position de référence).

Ainsi, $Ep_M = W_{M\to R}^{(\vec{F})} = q\,U_{M\to R}$

or $U_{M\to R} = V_M - V_R = V_M$

donc $\mathbf{Ep_M = qV_M}$

où q en coulomb (C), V_M en volt (V) et Ep_M en joule (J)

Exercice résolu 4

Dans la chambre d'ionisation (1) des atomes de lithium sont ionisés en Li^+(chaque ion possède la charge q = +e).

Ils pénètrent avec une vitesse négligeable, par l'orifice O, dans une chambre (2), où la tension U_0 établie entre les plaques A et C, les accélère. Ils en sortent par l'orifice O'.

Ils entrent alors dans une autre enceinte (3), où règne un champ électrique $\vec{E}$uniforme.

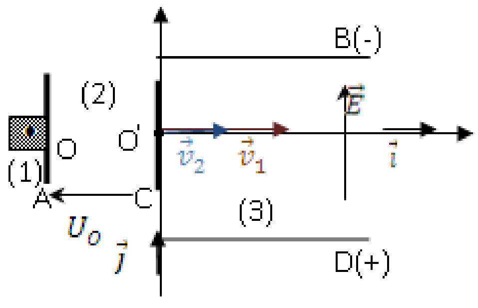
Les atomes de lithium possèdent les isotopes ^6Li et ^7Li de masses respectives m_1 et m_2.

1) **Exprimer les vitesses v_1 et v_2 de ces ions isotopes au passage en O'.**
2) **-Déterminer, dans le repère (O', $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), l'équation de la trajectoire des isotopes dans la chambre (3) ; le vecteur $\vec{E}$ étant orthogonal aux vecteurs vitesses $\vec{v_1}$ *et* $\vec{v_2}$.**
   -Ce dispositif permet-il de séparer les isotopes ?

Solution

1) **Les vitesses v_1 et v_2 des ions isotopes au passage en O'**

- Le système considéré est un ion isotope de lithium dans la chambre (2)en mouvement par rapport au référentiel du labo considéré comme galiléen.
- Force appliquée : la seule force électrique $\vec{F_0} = e.\vec{E_O}$, le poids étant négligeable.
- le théorème de l'énergie cinétique, appliqué entre les dates t_O et $t_{O'}$, s'écrit :



$Ec_{O'} - Ec_O = W_{O\to O'}^{(\vec{F}_O)} = eU_{OO'}$

or $U_{OO'} = U_O$

D'où $\frac{1}{2}m.v^2 = e.U_0$

soit $v^2 = \frac{2e.U_0}{m} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$

Alors, pour $^6Li^+$ de masse m_1, on a $\boldsymbol{v_1} = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_1}}$

Pour $^7Li^+$ de masse m_2, on a a $\boldsymbol{v_2} = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_2}}$

NB : $v_1 > v_2$ *car* $m_2 > m_1$

2) **La trajectoire des isotopes dans la chambre (3)**

- Système considéré: ion isotope dans la chambre (3) toujours en mouvement par rapport au référentiel Labo supposé galiléen.
- Force appliquée : la seule force électrique $\vec{F} = e.\vec{E}$ (constante).
- D'après le théorème du centre d'inertie,
- son vecteur accélération $\vec{a} = \frac{e}{m}.\vec{E}$contant $\Rightarrow$ $\overrightarrow{O'M} = \frac{1}{2}\frac{e}{m}.\vec{E}t^2 + \vec{v}_{O'}t + \overrightarrow{O'M_O}$

où $\vec{v}_{O'}$et $\overrightarrow{O'M_O}$ sont respectivement les vecteurs vitesse et position à t = 0 (moment où la particule pénètre en O').

- La projection de $\overrightarrow{O'M}$ sur les axes du repère R (O', $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$),donne les équations horaires :

$$\begin{cases} x = v_{0'}.t \\ y = \frac{eE}{2m}.t^2 \end{cases}$$

L’équation cartésienne de la trajectoire d’un ion est ,avec $t = \frac{x}{v_0}$:

$$y = \frac{e.E}{2mv_{0'}^2}.x^2$$

Dans la chambre (3), l’ion décrit une parabole de sommet O’ puisque $\vec{v}_{O'} \nparallel \vec{E}$

Pour l’ion $^6Li^+$, l’équation de sa trajectoire est :

$\boldsymbol{y_1} = \frac{\boldsymbol{e.E}}{\boldsymbol{2m_1.v_1^2}}.\boldsymbol{x^2}$ avec $v_1^2 = \frac{2eU_O}{m_1}$ $\Longrightarrow$ après simplification, $\boldsymbol{y_1 = \frac{E}{4U_O}x^2}$

Et pour l’isotope $^7Li^+$:

$\boldsymbol{y_2} = \frac{\boldsymbol{e.E}}{\boldsymbol{2m_2.v_2^2}}.\boldsymbol{x^2}$ avec $v_2^2 = \frac{2eU_O}{m_2}$ $\Longrightarrow$ après simplification, $\boldsymbol{y_2 = \frac{E}{4U_O}x^2}$

$\boldsymbol{y_1 = y_2}$: tous les ions décrivent la même trajectoire parabolique dans la chambre (3) et les isotopes en sortent tous par le même point : **ils ne seront donc pas séparés.**

3- Interaction gravitationnelle - Mouvement circulaire des satellites

3-1- Interaction gravitationnelle

a- Définition

L’interaction gravitationnelle est l’interaction, sur Terre et dans l ’espace, de tous les corps ayant une masse est l’interaction gravitationnelle.

b- Loi de Newton

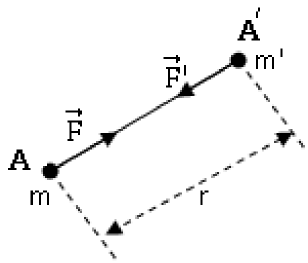
Deux corps ponctuels, situés aux point A et A’, de masse m et m’ s’attirent.les forces d’attraction qu’ils subissent sont opposées et de même direction AA’.

Le principe des actions réciproques est vérifié : $\vec{F} = -\vec{F'}$

L’intensité commune des forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ s’écrit : $\boldsymbol{F = F' = G.\frac{m.m'}{r^2}}$

avec m et m’ en kilogrammes ; r en mètres ; F et F’ en newtons

G, la constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67.10^{-11} N.m^2kg^{-2}$



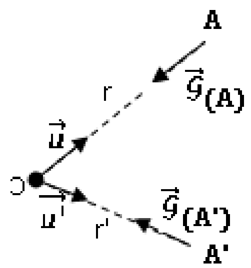
c- Vecteur champ de gravitation d’un corps ponctuel

- Un corps ponctuel de masse M, placé au point O, crée dans l’espace qui l’entoure un champ de gravitation. Ce champ est vectoriel et toujours orienté vers sa source (ici vers O).

En un point A, il s’écrit :

$$\vec{\mathcal{G}}_{(A)} = -\boldsymbol{G}.\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{r^2}}.\vec{\boldsymbol{u}}$$

avec $r = OA$; m_O: masse de la source de $\vec{\mathcal{G}}_{(A)}$ et $\vec{u}$: vecteur unitaire suivant $\overrightarrow{OA}$.



- Un corps ponctuel de masse m, placé au point A, subira la force $\vec{F}$= m. $\vec{\mathcal{G}}_{(A)}$.

Dans un référentiel galiléen choisi, l’accélération du corps ponctuel de masse m, s’il n’est soumis qu’à la seule force gravitationnelle, s’identifie au champ de gravitation d’après le théorème du centre d’inertie :

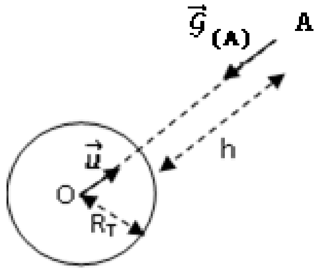
$$\vec{\mathcal{G}}_{(A)} = \vec{\boldsymbol{a}}$$

Son mouvement est donc indépendant de sa masse.

d- Vecteur champ de gravitation d'un corps à répartition sphérique de masse

Corps à répartition sphérique de masse

Un corps à **répartition sphérique de masse** est un corps constitué par des couches concentriques (Ex : La terre, les étoiles, la Lune, les astres) ou un corps sphérique dont la masse est répartie uniformément(Ex : la boule).



Expression

Le vecteur champ de gravitation créé par un corps $\mathcal{C}$ à répartition sphérique de masse est identique à celui créé par un corps ponctuel placé au centre de $\mathcal{C}$ et dont la masse est égale à celle de $\mathcal{C}$.

Le vecteur champ de gravitation, en A, créé par $\mathcal{C}$ s'écrit, en appelant M la masse : $\vec{\mathcal{G}}_{(A)} = -\,G.\frac{M}{r^2}.\vec{u}$

avec $r = \mathrm{OA}$ et $\vec{u}$: vecteur unitaire suivant $\overrightarrow{OA}$ (O centre de $\mathcal{C}$).

Champ gravitationnel terrestre

Le champ de gravitation terrestre $\vec{\mathcal{G}}$ est le champ de gravitation créé par la Terre dans la région de l'espace qui l'entoure.

Expression

La Terre étant considérée comme un corps à répartition sphérique de masse donc le champ de gravitation qu'elle crée à l'extérieur est le même que si toute sa masse était concentrée en son centre.
Ainsi, le vecteur champ de gravitation terrestre à l'altitude h s'écrit, en notant R_T le rayon de la Terre et M sa masse :

$$\vec{\mathcal{G}} = -G.\frac{\mathbf{M}}{(\mathbf{R_T+h})^2}.\vec{\mathbf{u}}$$

Norme

- A l'altitude h, la norme de $\vec{\mathcal{G}}$ est $\mathcal{G} = G.\frac{\mathbf{M}}{(\mathbf{R_T+h})^2}$ en ms^{-}
- Au niveau du sol (h = o), le champ de gravitation a pour valeur :

$$\mathcal{G}_0 = G.\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R_T}^2} \approx 9{,}80 \text{ ms}^{-2}$$

- En introduisant $\mathcal{G}_0$ dans l'expression de $\mathcal{G} = G.\frac{\mathrm{M}}{(\mathrm{R_T+h})^2}$, on obtient :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \frac{\mathbf{R_T}^2}{(\mathbf{R_T+h})^2}.$$

<u>**Remarque :**</u> valeur approximative *de* $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G} = \frac{GM}{R_T^2\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = \mathcal{G}_0\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2}$$

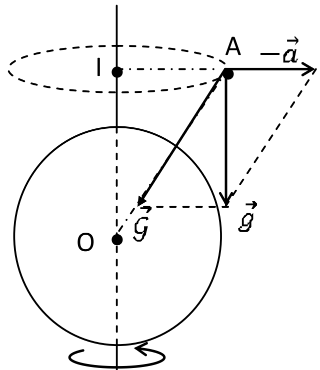
Si $\frac{h}{R_T} < \frac{1}{100}$, c'est-à – dire que h< $\frac{R_T}{100}$= 64 km, l'approximation $(1+\mathcal{E})^n$ ≈1+n $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est possible, par suite ;

$$\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_0\left(1-\frac{2h}{R_T}\right)$$

Champ de gravitation terrestre $\vec{\mathcal{G}}$ et champ de pesanteur $\vec{g}$

Si l'on néglige la rotation de la Terre sur elle-même, on identifie le champ de pesanteur $\vec{g}$ au champ de gravitation terrestre $\vec{\mathcal{G}}$ car le terme centrifuge **-$\vec{a}$** s'annule.

$$\vec{g} \approx \vec{\mathcal{G}} \Rightarrow \quad g = g_0 \cdot \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$$



3-2- Mouvement circulaire d'un satellite autour de la terre

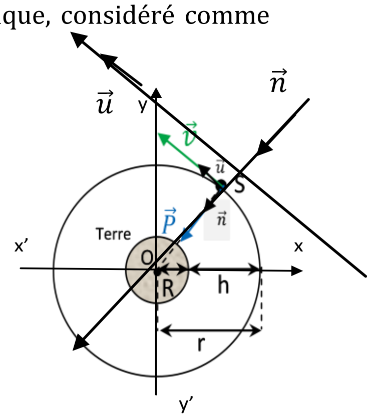
a- Lancement d'un satellite

Le lancement d'un satellite comporte deux phases :

- **La phase propulsée :** Le satellite est porté par une fusée dont le moteur fonctionne par la combustion de gaz.
- **La satellisation ;** en fin de combustion, le satellite est « abandonné à lui-même» à un certain moment avec une certaine vitesse initiale. Après la satellisation, son mouvement se poursuit sous la seule force gravitationnelle. La trajectoire du satellite est, en général, un ellipse dont le centre de la Terre occupe l'un des foyers.

b- Cas d'une trajectoire circulaire

L'étude du mouvement d'un satellite se limite à la trajectoire circulaire qui est contenue dans le plan de l'équateur. Son mouvement est observé, par rapport au repère géocentrique, considéré comme étant galiléen.



Mouvement uniforme

Le satellite est soumis à la seule force, la force gravitationnelle que la Terre exerce sur lui.

En appliquant le T.C.I : $\vec{P} = m\vec{a}$

La projection du T.C.I, suivant l'axe orienté par $\vec{u}$, donne $P_t = m.a_t$

Par suite, $0 = ma_n$

d'où $a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v$ constante : ***le mouvement circulaire du satellite est uniforme.***

Vitesse linéaire

La projection du T.C.I suivant l'axe orienté par $\vec{n}$ donne : $P_n = m\, a_n$

$$mg = ma_n$$

or $g = g_o \frac{R_T{}^2}{(R_T+h)^2}$ et $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T+h}$

d'où $\quad g_o \frac{R^2}{(R_T+h)^2} = \frac{v^2}{R_T+h} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R_T{}^2}{R_T+h}}$

- La vitesse v est indépendante à la masse du satellite.
- v est faible quand $r \longmapsto \infty$

Période de révolution :

La période T est la durée pour effectuer un tour complet.

$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{R_T}\sqrt{\frac{r}{g_o}} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{R_T\sqrt{g_o}}.r^{\frac{3}{2}}$ avec $r = R_T + h$

Etude énergétique

- *Energie potentielle*

Considérons le système {Satellite – Terre} et pour trouver l'expression de l'énergie potentielle E_p(r) à la position r, on doit suivre les étapes suivantes :

- calculer le travail élémentaire du poids $\vec{P}$ du satellite en allant de r à r +dr : $dW^{\vec{P}}_{r \to r+dr}$ avec dr> 0 et l'énergie potentielle de pesanteur E_p est nulle quand r est infini.

- Déterminer l'expression de E_p(r) par intégration du travail élémentaire de $\vec{P}$:

$dW^{\vec{P}}_{r \to r+dr} = -mgdr = -\frac{mKg_0R^2}{r^2}dr$

$$E_p(r) = -mg_0{R_T}^2\int_r^{\infty}\frac{1}{r^2}dr = -mg_0{R_T}^2\left[\frac{-1}{r}\right]_r^{\infty} \text{ soit} E_p(r) = -\frac{mg_0{R_T}^2}{r}$$

- ***Energie cinétique*** : $E_c(r) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{mg_0{R_T}^2}{r}$
- ***Energie mécanique*** : $\boldsymbol{E = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{mg_0{R_T}^2}{r}}$

Satellite géostationnaire :

Dans un référentiel géocentrique galiléen, les satellites équatoriaux qui tournent dans le sens de rotation de la terre avec la même vitesse angulaire qu'elle, sont appelés satellites géostationnaires. Ils sont utilisés en télécommunication.

Leur période **T** = 1jour sidéral= **86 164 s.**

Le rayon de la trajectoire de tous les satellites stationnaires est :

$$\boldsymbol{r = \left(\frac{T^2 G.M_T}{4.\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

A.N : $\mathbf{r \simeq 4,22.10^7 m}$

L'altitude où se trouvent les satellites géostationnaires est :

$$\mathbf{h = r - R_T}$$

A.N : h ≃ 42 200 – 6 400 soit **h ≃35 800km**

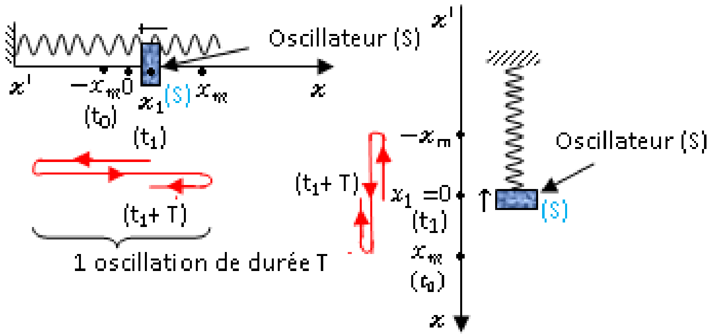
La vitesse de tous les satellites géostationnaires est :

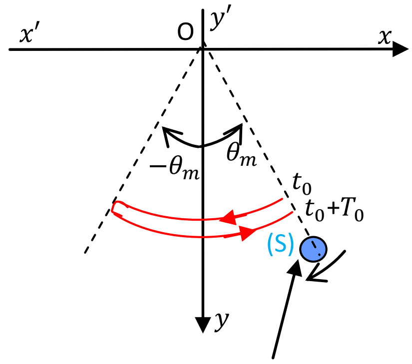
$$\boldsymbol{v = \mathbf{R_T}\sqrt{\frac{\mathbf{g_0}}{\mathbf{R_T+h}}}}$$

A.N. $\boldsymbol{v \simeq \mathbf{3\ km.s^{-1}}}$

4- Oscillateurs mécaniques de translation

4-1- Exemples





Oscillateur (S) (solide ponctuel) en mouvement sur une portion de surface sphérique bien lisse.

Pour faire osciller (S), on l'écarte de sa position d'équilibre stable et on l'abandonne à lui–même.

4-2- Caractéristiques générales

a- <u>Définition</u>

Un oscillateur est un objet animé d'un mouvement de va – et – vient en repassant périodiquement par sa position d'équilibre.

b- <u>Période</u>

La période d'un oscillateur qui est la durée d'une oscillation complète a pour expression **T** = $\boldsymbol{\frac{2\pi}{\omega}}$ avec T en s et ω en rad.s^{-1}.

c- <u>Fréquence</u>

La fréquence N Correspond au nombre d'oscillations effectuées par seconde :

N = $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ avec N en Hz (nombre d'oscillations par seconde) ; ω en rad.s^{-1} et T en s

d- <u>Équation différentielle du mouvement</u>

C'est la relation entre un paramètre de position et ses dérivées.

- **Cas où il n'y a pas de frottement :**

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (oscillations rectilignes) ou $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ (oscillations circulaires de faible amplitude).

On déduit de cette équation différentielle que :

- les oscillations sont sinusoïdales de pulsation propre ω_0 et de période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$
- l'oscillateur est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation horaire $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$ ou circulaire sinusoïdal d'équation horaire $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$ (solution générale de l'équation différentielle).

- **Cas où il y a frottements :** $\ddot{x} + \mu\,\dot{x} + \omega x = 0$ ou $\ddot{\theta} + \mu\,\dot{\theta} + \omega\theta = 0$ où µ : coefficient de frottements.

Pour les frottements faibles, les oscillations sont amorties et pseudopériodiques de pseudo-période $T \simeq T_0$

Détermination de l'équation différentielle en négligeant les frottements

a- Par l'utilisation du théorème de centre d'inertie (T.C.I)

L'équilibre et le mouvement de S sont observés dans le repère terrestre supposé galiléen.

Forces extérieures appliquées à S : poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}_0$ du ressort

S en équilibre : $\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$

Projection du T.C.I sur l'axe $x'Ox$: mg – kA_0 = 0 **(1)** où m : masse de S en kg, k : raideur du ressort en N.m^{-1} et A_0 : son allongement en m.

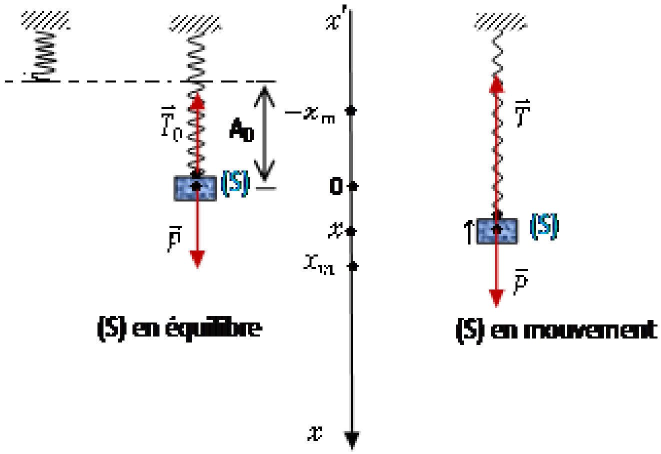
Équation différentielle du mouvement de S :

S en mouvement, le T.C.I s'écrit : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Sa projection, suivant l'axe $x'Ox$, donne :

mg - k (A_0 + x) = m$\ddot{x}$

D'où (mg – kA_0) - kx = m$\ddot{x}$ avec mg – kA_0 = 0 d'après la relation **(1)** $\Rightarrow \boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$



b- Par la dérivée de l'énergie mécanique constante

D'après l'étude précédente de l'équilibre de S, $\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{O}$ $\Longrightarrow$ mg –kA_0 = 0 sur l'axe $x'Ox$

S en mouvement :

L'énergie mécanique de S à la position d'abscisse x est $E_x = E_{px} + E_{cx}$ avec énergie potentielle de pesanteur (E_{pp}) nulle pour $x = x_m$ et énergie potentielle élastique (E_{pe}) du ressort nulle pour $x = -A_0$

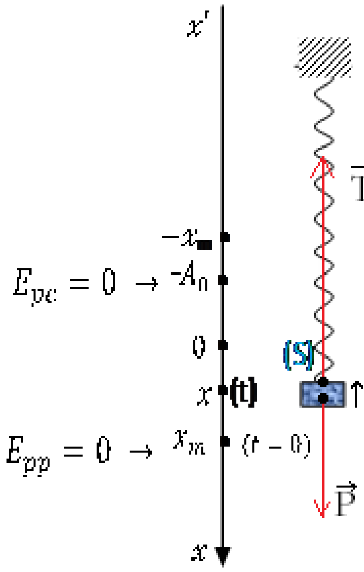
Pour déterminer son énergie potentielle E_{px} , considérons le système {S, Terre, ressort}.

Dans ce cas, le poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}$du ressort qui travaillent, au cours du déplacement de S, deviennent forces intérieures donc :

$$E_{px} = W^{(\vec{P})}_{x\to x_m} + W^{(\vec{T})}_{x\to -A_0} = \text{mg}(x_m - x) - \frac{1}{2}k[A_0^2 - (A_0 + x)^2]$$

$$E_{px} = -(\text{mg} - kA_0)x + \frac{1}{2}kx^2 + \text{mg}x_m \quad \text{avec mg} - kA_0 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad E_{px} = \frac{1}{2}kx^2 + \text{mg}x_m$$



Expression deE_{cx} : $E_{cx} = \frac{1}{2}\text{m}\dot{x}^2$

Par suite, $E_x = \frac{1}{2}\text{m}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \text{mg}x_m$

Comme l'énergie mécanique E_x est constante en négligeant les frottements,

on a $\frac{dE_x}{dt} = 0$

$\frac{dE_x}{dt} = 0 \Leftrightarrow \text{m}\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x + 0 = 0$ avec $\dot{x} \neq 0 \Longrightarrow \text{m}\ddot{x} + kx = 0$

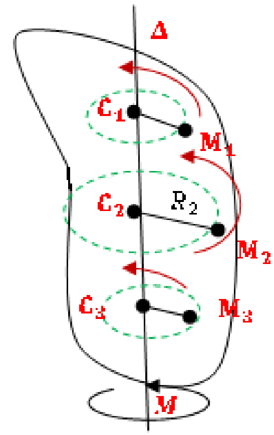
Soit $\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

<u>Remarque</u>

Quand le ressort est déformé au moment où S est en équilibre, étudier cet équilibre avant d'établir l'équation différentielle de son mouvement.

II- Dynamique d'un solide en rotation

1- Rappels



1-1- Rotation d'un solide

Un solide est en rotation autour d'un axe (Δ) lorsque tous les points $M_1, M_2, \ldots, M_i$ de ce solide ont des trajectoires circulaires centrées sur cet axe.

<u>Propriété</u>

Tous les points d'un solide en rotation ont à chaque instant la même vitesse angulaire.

1-2- Travail d'une force

a- <u>de moment constant :</u>

$$\boldsymbol{W_{0\to\theta}^{(\vec{F})} = \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta}\theta}$$

où θ en radian (rad) : l'angle dont a tourné le solide autour de l'axe (Δ) ; $\mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta}$ en newton-mètre (Nm) ; $W_{0\to\theta}^{(\vec{F})}$ en joule (J).

b- <u>de moment non constant :</u>

- $\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta}$ non constant avec $\vec{P} = m\vec{g}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{W_{0\to\theta}^{(\vec{P})} = \pm\, mgh}$

  où h est la dénivellation entre les positions initiale et finale du centre d'inertie d'un solide de masse m ayant tourné d'un angle θ autour d'un axe (Δ).

- $W_{0\to\theta}^{(\vec{C})} = -C\theta$ (non constant) où $\vec{C}$: couple de torsion d'un fil, C $en\ Nm.rad^{-1}$: sa constante de torsion et θ $(en\ rad)$: angle de torsion $\Rightarrow$ $\boldsymbol{W_{0\to\theta}^{(\vec{C})} = -\frac{1}{2}C\theta^2}$

1-3- Puissance d'une force $\vec{F}$ agissant sur un solide en rotation :

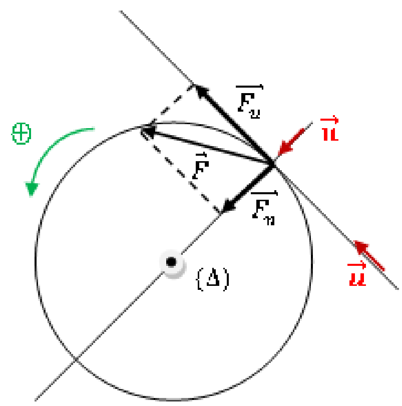
$$\boldsymbol{\mathcal{P}(\vec{F}) = \frac{dW_{1\to 2}^{(\vec{F})}}{dt} = \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta}\dot{\theta}}$$

où $\mathcal{P}(\vec{F})$ en watts (W), $\mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta}$ en Nm et $\dot{\theta}$ en rad.s^{-1}

2- Moment d'une force appliquée à un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ)

a- Soit $\vec{F}$ la résultante des forces appliquées à un point matériel M de masse m.telle que $\vec{F} = \vec{F_t} + \vec{F_n}$

$\mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = \mathcal{M}_{\vec{F_t}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{F_n}/\Delta} = F_t.r$



Dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen, le théorème du centre d'inertie s'écrit :

$$\vec{F_t} + \vec{F_n} = m\vec{a}$$

où m est la masse du point matériel et $\vec{a}$ $son\ accélération$

Selon la tangente orientée par $\vec{u}$:

$$F_t = ma_t = mr\ddot{\theta}$$

où $\ddot{\theta}$ est la vitesse angulaire du point matériel en mouvement

circulaire.
Finalement, $\boldsymbol{\mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = mr^2\ddot{\theta}}$
où mr^2 est le moment d'inertie du point matériel M par rapport à l'axe (Δ).

3- Théorème de l'accélération angulaire (TAA)

Soit un solide en rotation, avec une accélération angulaire $\ddot{\theta}$, autour d'un axe fixe (Δ)dansun référentiel terrestre considéré comme galiléen.
Ce solide est l'ensemble des points matériels situés à des distances r_1, r_2, … par rapport à (Δ) et ayant les masses respectives m_1, m_2, …
Le moment résultant des forces appliquées à ce solide s'écrit :
Pour le point M1 : $\mathcal{M}_{\vec{F}_1/\Delta} = mr_1^2\ddot{\theta}$
Pour le point M2 : $\mathcal{M}_{\vec{F}_2/\Delta} = mr_2^2\ddot{\theta}$
………………………………………………

L'addition membre à membre des égalités obtenues donnent :

$$\mathcal{M}_{\vec{F}_{1/\Delta}} + \mathcal{M}_{\vec{F}_{2/\Delta}} + \ldots = m_1.r_1^2\ddot{\theta} + m_2.r_2^2\ddot{\theta} + \cdots$$

$$\mathcal{M}_{(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots)/\Delta} = (m_1.r_1^2 + m_2.r_2^2 + \ldots)\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\textstyle\sum_i \vec{F}_i) = (\sum_i m_i r_i^2)\ddot{\theta}$$

En posant $\sum_i \vec{F}_i = \sum \vec{F}$: $\mathcal{M}_{/\Delta}(\sum \vec{F}) = (\sum_i m_i r_i^2)\ddot{\theta}$ ou $\sum \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = (\sum_i m_i r_i^2)\ddot{\theta}$
En considérant le terme $\sum_i m_i r_i^2 = J_\Delta$ qui définit le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Δ),

Le théorème de l'accélération angulaire s'écrit :

$$\boldsymbol{\sum \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}} \text{ dans un référentiel galiléen}$$

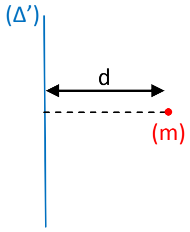
où $\sum \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F})$ en Nm ; J_Δ en kg.m^2 ; $\ddot{\theta}$ en rad.s^{-2}

4- Quelques Mouvements de rotation

Type de mouvement	Moment résultant	Accélération angulaire	Vitesse angulaire	Abscisse angulaire
Rotation uniforme	$\sum_i M_{\vec{F}_i/\Delta} = 0$	$\ddot{\theta} = 0$	$\dot{\theta} = \omega = cte$	$\theta = \omega t + \theta_o$
Rotation uniformément variée	$\sum_i M_{\vec{F}_i/\Delta} = cte$	$\ddot{\theta} = cte$	$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_o$	$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_o t + \theta_o$
	Relation indépendante du temps : $\boldsymbol{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0)}$			
Rotation sinusoïdale	$\sum_i M_{\vec{F}_i/\Delta} = -C\theta$	$\ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0$	$\dot{\theta} = \theta_m \omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$
	Relation indépendante du temps : $\boldsymbol{\dot{\theta}^2 = \omega^2(\theta_m^2 - \theta^2)}$			

4-1- Moment d'inertie par rapport à un axe Δ'.

Pour un point matériel de masse m



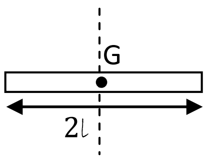
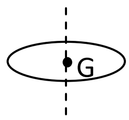
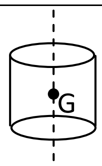
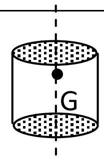
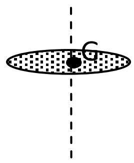
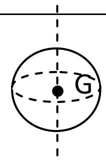
$J_{\Delta'} =$ md² où $J_{\Delta'}$ en kg.m², masse m en kg et la distance d entre l'axe et le point matériel en m.

Pour un solide (ensemble de points matériels)

Le moment d'inertie qui rend compte de la répartition de la masse autour de l'axe de symétrie Δ' et caractérise l'inertie du solide, c'est-à-dire, la difficulté plus ou moins grande de faire varier sa vitesse angulaire est déterminé par l'expression $J_{\Delta'} = \sum_i m_i . r_i^2$ où m_i *est la* masse d'un point matériel i constituant le solide et r_i*est la* distance entre un point matériel et l'axe Δ'.
Cette formule est applicable lorsque tous les points constituant le solide homogène sont situés à la même distance de l'axe Δ'. Par exemple, pour le cerceau et le cylindre homogènes de rayon r et masse m :

$$J_{\Delta'} = \sum_i m_i . r^2 = (\sum_i m_i) . r^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J_{\Delta'} = m . r^2} \text{ avec } m = \sum_i \boldsymbol{m_i}.$$

4-2- Moments d'inertie de quelques solides homogènes ayant une forme géométrique simple

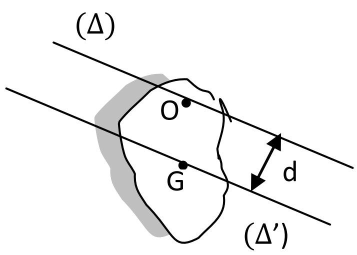
Solide	Tige ou plaque carrée	Cerceau ou cylindre creux	Disque ou cylindre plein	Sphère pleine ou boule
Moment d'inertie	$J_{\Delta'} = \frac{1}{3} m . l^2$	$J_{\Delta'} = m . r^2$	$J_{\Delta'} = \frac{1}{2} m . r^2$	$J_{\Delta'} = \frac{2}{5} m . r^2$
figure		 	 	

4-3- Théorème d'Huygens

Le théorème d'Huygens est traduit par la relation :

$$J_\Delta = J_{\Delta'} + md^2$$

avec $\Delta \parallel \Delta'$, d est la distance entre les deux axes Δ et Δ' et m est la masse du solide.

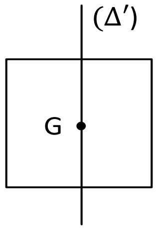


Ce théorème est utilisé pour calculer le moment d'inertie d'un solide ne passant pas son axe de symétrie.

4-4- Méthode pour établir le moment d'inertie d'un solide homogène par rapport à l'axe Δ'passant par son axe de symétrie

- Décomposer le solide en élément matériel de longueur dx, de surface dS ou de volume dV afin que les points de cet élément soient situés à la même distance de l'axe Δ.

- Exprimer la masse élémentaire dm de cet élément en fonction de la masse linéique$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{m}{\ell}$surfacique$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{m}{S}$ ou volumique $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{m}{V}$ σ
- Trouver l'expression du moment d'inertie élémentaire dJ_Δ de l'élément matériel
- Déterminer le moment d'inertie J_Δ du solide par intégration.



Exercice résolu 5

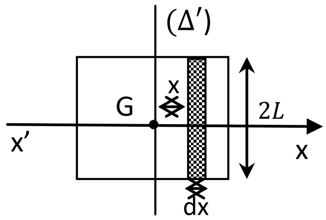
Établir le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ' d'une plaque carrée homogène de côté $2L$ et de masse m (voir figure ci-contre).

Solution

Considérons un élément matériel de masse élémentaire dm et de surface élémentaire dS situé à la distance x de l'axe Δ'

La masse élémentaire dm en fonction de la masse surfacique a pour expression :

$$\sigma = \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma dS$$



Moment d'inertie élémentaire :

$$dJ_{\Delta'} = dm.x^2 = \sigma dS.x^2$$

or $dS = 2L.dx$ et $\sigma = \frac{m}{4L^2}$

donc $dJ_{\Delta'} = \frac{m}{4L^2}(2L.dx).x^2 \quad \Rightarrow \quad dJ_{\Delta'} = \frac{mx^2}{2L}dx$

Par intégration, $J_{\Delta'} = \int_{-L}^{L}(\frac{m}{2L}x^2)dx = \frac{m}{2L}\int_{-L}^{L}x^2\,dx = \frac{m}{2L}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-L}^{L} \Rightarrow J_{\Delta'} = \frac{m}{6L}[L^3 + L^3]$

Soit $\boldsymbol{J_{\Delta'} = \frac{1}{3}mL^2}$

5- Théorème de l'énergie cinétique

Enoncé

Le théorème de l'énergi cinétique qui est la forme intégrée du théorème de l'accélération angulaire s'énonce comme suit :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un système en rotation autour d'un axe (Δ) est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces intérieures et extérieures appliquées à ce système entre ces deux instants.

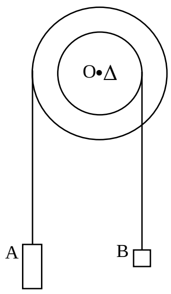
Dans un référentiel galiléen, $\boldsymbol{Ec_2 - Ec_1 = \sum W^{(\vec{F})}_{(1)\to(2)}}$

où $Ec_1 = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_1^2$ et $Ec_1 = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_1^2$

Remarque :

Si un système comporte des solides en translation et en rotation, son énergie cinétique est égale à la somme des énergies cinétiques des solides en translation et en rotation.

Exercice résolu 6



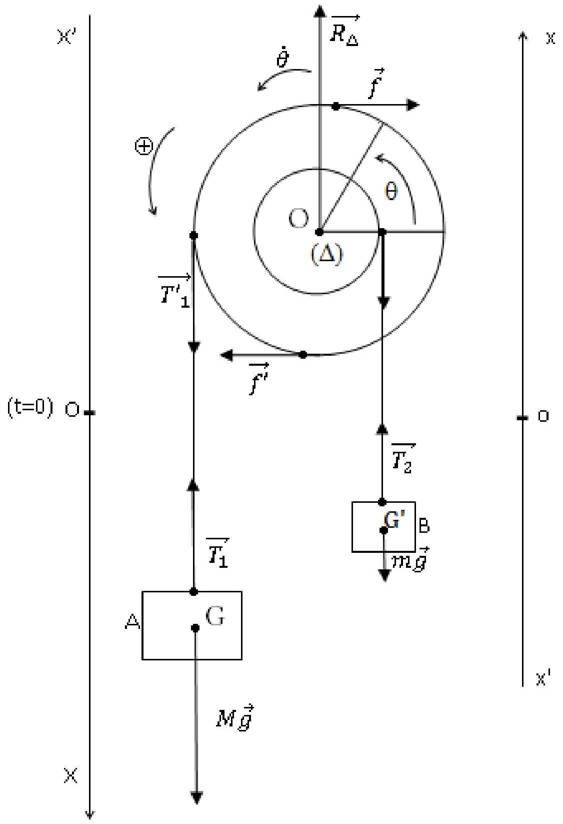
Une poulie de masse négligeable, formée de deux cylindres C et c coaxiaux de rayons R=20cm et r = 10cm peut tourner autour d'un axe horizontal Δ passant par son centre O. Elle supporte un fil inextensible qui ne glisse pas. Aux extrémités du fil sont suspendus deux corps A (m_A = 800g) et B (m_B = 100g). Les frottements, appliqués à la périphérie de la poulie de rayon R, ont une action équivalente à un couple d'intensité 2.10^{-2}N s'opposant à la rotation de cette poulie à deux gorges. Calculer :

1. **l'accélération a du mouvement du corps A.**
2. **Déterminer l'équation horaire du centre d'inertie G de A et celle de la poulie.**

Solution

Calcul de l'accélération $\vec{a}$ du mouvement du corps A

Les mouvements de la poulie, des corps A et B sont observés dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.



Système{corps A} : Poids $M\vec{g}$, tension $\vec{T_1}$ du fil

D'après le TCI, $M\vec{g} + \vec{T_1} = M\vec{a}$

Suivant l'axe (X'OX) : $Mg_X + T_{1X} = Ma_X$

$Mg - T_1 = Ma_X \Longrightarrow T_1 = Mg - Ma_X$ (1)

Système{corps B} : Poids $m\vec{g}$, tenson T_2du fil

D'après le TCI $m\vec{g} + \vec{T_2} = m\vec{a'}$

Suivant (x'o x) : $mg_x + T_{2x} = ma'_x$

$-mg + T_2 = ma'_x \Longrightarrow T_2 = ma'_x + mg$ (2)

Système{poulie de masse négligeable } : Tensions des fils $\overrightarrow{T'_1}, \overrightarrow{T'_2}$ couple de frottement $\vec{C} = (\vec{f}, \vec{f'})$, et la réaction de l'axe $\vec{R_\Delta}$.

Le TAA s'écrit :

$\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{T'_1}) + \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{T'_2}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{C}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R_\Delta}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

$T'_1.R - T'_2.r - 2f.R + 0 = 0.\ddot{\theta}$

$T'_1.R - T'_2.r + 0 = 2f.R$ (3)

Le long des fils tendus $T'_1 = T_1$ et $T'_2 = T_2$

La relation (3) devient alors

$T_1.R - T_2.r + 0 = 2f.R$

D'après la relation (1) et (3) :$(Mg - Ma_X).R - (ma'_x + mg).r = 2f.R$

$(M.R - m.r)g - MRa_X - mra'_x = 2f.R$

Or le fil étant inextensible : $\frac{a'_x}{a_X} = \frac{r\ddot{\theta}}{R\ddot{\theta}} \Longrightarrow a'_x = \frac{r}{R}a_X$

Donc $(M.R - m.r)g - MRa_X - m\frac{r^2}{R}a_X = 2f.R$

$$a_X = \frac{(MR - mr)g - 2fR}{MR + m\frac{r^2}{R}} = \frac{(0{,}80 \times 0{,}20 - 0{,}10 \times 0{,}10\,) - 2 \times 2.10^{-2} \times 0{,}20}{0{,}8 \times 0{,}20 + 0{,}1 + \frac{(0{,}10)^2}{0{,}20}}$$

Soit

$$a_X = 9\ m.s^{-2} \Longrightarrow \boldsymbol{a = 9\ m.s^{-2}}$$

Détermination de l'équation horaire du centre d'inertie G du corps A

a_X constante pour G de A

Par intégration $v_X = a_X t + v_{0X} = 9t, v_{0X} = 0$ car il s'agit d'un mouvement sans vitesse initiale.

Part intégration $x = 4{,}5\ t^2 + X_0$

Or à t=0 (instant de départ) $X_0 = 0$

Donc $\boldsymbol{X = 4{,}5t^2}$

Equation horaire de cette poulie :

Fil inextensible : $X = R\theta$

D'où $\theta = \frac{X}{R} = \frac{4{,}5t^2}{0{,}20}$ Soit $\boldsymbol{\theta = 22{,}5\ t^2}$

EXERCICES

SOLIDE EN TRANSLATION

Exercice 1

Un solide de masse m est lâché sans vitesse initiale d'un point A sur une table inclinée d'un angle α sur le plan horizontal. Les frottements sont négligeables.

1-Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération.

2-Quelle est la nature du mouvement du centre d'inertie G du solide ?

3-Calculer la vitesse v_B du solide en B après un parcours de longueur l.

Données : m = 600g ; l = 52,0cm ; g = 9,80m.s^{-2} ; α = 60,0°

Exercice 2

Durant 1mn, la somme $\vec{F}$ des forces appliquées à un solide, de masse m = 80kg et initialement immobile, est constante d'intensité F = 200N. Le mouvement est supposé de translation rectiligne.

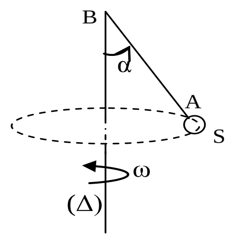
1-Quelle est la vitesse atteinte ?

2-Quelle est la distance parcourue ?

3-Quel est le travail effectué ?

Exercice 3

Un petit solide S, de masse m, est attaché à l'extrémité A d'un fil très fin, de masse négligeable et de longueur constante l. L'autre extrémité du fil est fixé en B. le solide est lancé de façon convenable et tourne autour d'un axe vertical Δ passant par B avec une vitesse angulaire ω. Le solide a un mouvement circulaire uniforme. L'angle du fil AB avec l'axe vertical Δ est α.



1-Déterminer les caractéristiques de l'accélération a du solide. La valeur de l'accélération sera exprimée en fonction de ω, de l et de α.

2-Calculer la valeur de la tension du fil.

Données : l = 0,30m ; ω = 6,2rad.s^{-1} ; α = 30° ; m = 0,1kg ; g = 10m.s^{-2}

3-Déterminer la vitesse angulaire minimale ω_0 pour que le pendule s'écarte de la verticale.

Exercice 4

Quand un corps se déplace dans un fluide tel qu'un gaz ou un liquide à une vitesse relativement faible, la force de frottement est proportionnelle et de sens opposé à la vitesse $\vec{v}$. Elle dépend aussi de la forme de l'objet. Dans le cas d'une sphère de rayon R : $\vec{F} = -$ 6π.R.η.$\vec{v}$ où η, caractéristique du fluide, est appelé coefficient de viscosité.

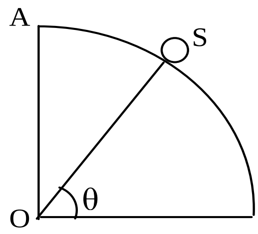
Trouver la vitesse limite v_{lim} d'une goutte de pluie sphérique de diamètre D = 10^{-3}m. On néglige la poussée d'Archimède.

Données : masse volumique de l'eau : μ = 10^{3}kg.m^{-3} ; pour l'air : η = 1,80. 10^{-5}N.s.m^{-2}

Rappel : une fonction f : t $\longmapsto$ f (t) est extrémale (maximale ou minimale) si : $\frac{df(t)}{dt} = 0$

Exercice 5

Un solide S de petites dimensions, de masse m, assimilable à un point matériel est placé au sommet A d'une sphère de rayon R = 1m et centre O. On déplace légèrement le point matériel S de sorte qu'il quitte la position A avec une vitesse que l'on considère comme nulle, puis glisse sans frottement le long de la sphère.



1-En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer la valeur de la vitesse de S, en fonction de θ, avant qu'il quitte la sphère.

2-En utilisant le théorème du centre d'inertie, exprimer en fonction de θ la valeur de la réaction exercée par la sphère sur le point P. En déduire la valeur de l'angle θ.

3-Quelle est sa vitesse en ce point ? Donnée : $g = 10m.s^{-2}$

Exercice 6

Un projectile est lancé verticalement de la surface du sol. Un système de détection enclenche un chronomètre à l'instant de départ et enregistre les dates t_1 et t_2 de passage du projectile dans le plan horizontal d'altitude h.

1-A quelle date et avec quelle vitesse le projectile retombe-t-il sur le sol ?

2-Déterminer la vitesse de lancement $v_0$et l'altitude h en fonction des dates t_1 et t_2.

A.N : $t_1 = 0{,}875s$, $t_2 = 9{,}329s$, $g = 9{,}81m.s^{-2}$

Exercice 7

Un homme au sommet d'un immeuble lance verticalement une bille de masse m vers le haut avec une vitesse de $12m.s^{-1}$. La bille atteint le sol 4,5s plus tard.

1-déterminer l'accélération de la bille.

2-Quelle est la hauteur maximale atteinte par la bille ?

3-Quelle est la hauteur H de l'immeuble ? Déterminer sa vitesse à mi-hauteur de l'immeuble.

4-Quelle est l'énergie cinétique de la bille au sol ?

Données : $g = 10m.s^{-2}$ et m = 10g

Exercice 8

Une auto de masse M = 1000kg subit une force de frottement d'intensité constante égale à 600N, de même direction et de sens contraire à sa vitesse $\vec{v}$.

1-L'auto part du repos et se déplace sur une route inclinée de 3% (sinα = 0,03) et atteint la vitesse de $10m.s^{-1}$ au bout d'une durée de 5s avec un mouvement uniformément varié.

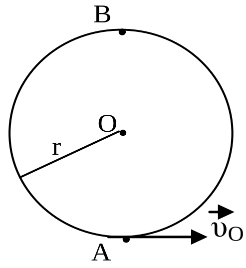
Calculer l'intensité de la force motrice $\vec{F}$ supposée constante, de même sens, même direction que le mouvement et la distance parcourue par l'auto.

2-Lorsque l'auto atteint cette vitesse de $10m.s^{-1}$, le chauffeur débraie, c'est-à-dire qu'il supprime l'action de la force motrice. Au bout de combien de temps l'auto s'arrêtera-t-elle ? Calculer la valeur de la réaction $\vec{R}$ de la route.

3-Quelle est la distance parcourue par l'auto avant de s'arrêter ? ($g = 10 m.s^{-2}$)

<u>Exercice 9</u>

Une bille assimilable à un corps ponctuel peut glisser sans frottement à l'intérieur d'un cerceau vertical, de rayon r et de centre O.



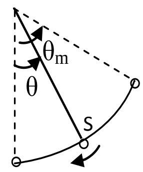
1-Exprimer l'intensité R de la réaction du cerceau en fonction de υ_0, de g, de r et de m(masse de la bille) lorsque la bille est au point B diamétralement opposé à A.

2-En déduire la valeur minimale de υ_0 pour que la bille reste en contact avec la gouttière durant toute trajectoire circulaire.

3-Données : $g = 9,8 m.s^{-2}$; $r = 0,5 m$

<u>Exercice 10</u>

Une petite sphère S, de rayon négligeable, de masse m = 200g est accrochée à un fil de masse négligeable, inextensible, de longueur l = 1m. L'autre extrémité du fil est attachée à un point fixe. On écarte S de sa position d'équilibre verticale. Le fil tendu fait un angle θm = 60° avec la verticale. On lâche la sphère sans vitesse initiale.



1-Donner l'expression de la vitesse de S en fonction de l'angle θ que fait le fil avec la verticale. Calculer cette vitesse au passage à la position verticale.

2-Exprimer l'accélération normale en fonction de θ. Calculer sa valeur pour θ = 0°.

3-Donner l'expression de la valeur de la tension du fil en fonction de θ. Calculer sa valeur maximale.

4-Exprimer l'accélération tangentielle en fonction de θ. Vérifier qu'elle s'annule lorsque la valeur de la tension est maximale.

<u>Exercice 11</u>

Une bille abandonnée sans vitesse initiale parcourt 20m dans sa dernière seconde de chute ($g = 10 m.s^{-2}$).

1-Quelle est la durée de chute ?

2-Quelle est la vitesse de la bille au bout de 10m de chute ?

3-Quelle est la vitesse de la bille lorsqu'elle arrive au sol ?

<u>Exercice 12</u>

Un gravier est projeté par le pneu d'un camion avec une vitesse $\vec{v}_0$ par rapport au sol. On supposera que le gravier part du sol et sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ fait un angle α tel que cos α = 0,6. On prendra $v_0 = 10 m.s^{-1}$ et

$g = 10 m.s^{-2}$.

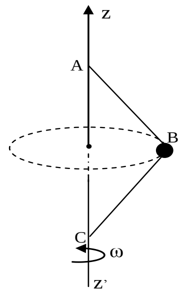
1-Déterminer l'altitude maximale (ou la flèche) du gravier au cours de son mouvement

2-Une voiture roule derrière le camion à la vitesse de $108 km.h^{-1}$. Elle est à 38m du camion au moment de la projection du gravier qui rencontre le pare-brise. Quelle a été la durée de son mouvement ?

3-Quelle est la vitesse du gravier par rapport au pare-brise au moment du choc.

4-A quelle hauteur le choc se fait-il sur le pare-brise ?

Exercice 13



Une bille assimilable à un point matériel B, de masse m, est reliée par deux fils de masse négligeable à deux points A et C d'un axe z'z. On note : AB = BC = l et AC = d.

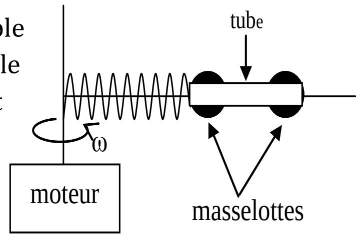
1-La bille B tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe z'z. Les fils restent constamment tendus. Calculer les valeurs des tensions des fils en fonction de ω.

2-Montrer que le fil BC n'est tendu qu'à partir d'une certaine valeur ω_0 de la vitesse angulaire.

3-Calculer ω_0 et les valeurs des tensions pour $\omega_1 = 8 rad.s^{-1}$ et $\omega_2 = 4 rad.s^{-1}$

Données: m = 0,6kg ; l = 0,7m ; d = 1m ; $g = 9,8 m.s^{-2}$.

Exercice 14



Un haltère AB, constitué de deux masselottes reliées par un tube de masse négligeable et de longueur l = 10cm, peut coulisser sans frottement, sur une tige horizontale assujettie à tourner autour d'un axe vertical. Les deux masselottes A et B ont respectivement les masses m et 2m avec m = 100g. La masselotte A est reliée à O par un ressort de masse négligeable, de longueur à vide l_0 = 14cm et de raideur k = $50 N.m^{-1}$.

1-Déterminer la position du centre d'inertie G de l'haltère par rapport à O lorsque la longueur du ressort devient l.

2-Calculer la longueur l du ressort quand la vitesse angulaire de la tige est $\frac{20}{\pi}$ $rad.s^{-1}$. Les masselottes sont supposées ponctuelles et prendre $\pi^2 = 10$.

3-En déduire la plus grande valeur de la vitesse angulaire permise pour que la déformation du ressort ne soit pas permanente sachant que la limite d'élasticité du ressort est atteinte lorsque sa longueur devient 1m.

Exercice 15

Une cage d'ascenseur de masse 5000kg dessert un puits de mine de 900m de profondeur. Pendant le mouvement, les résistances de frottement sont équivalentes à une force de 5000N parallèle au mouvement et indépendante de la vitesse (prendre

$g = 10 m.s^{-2}$).

1-La cage étant au fond du puits. On exerce une force de traction de 60 000N vers le haut. Au bout de 100m de parcours, l'effort de traction est modifié pour que le mouvement devienne uniforme. L'effort de traction est ensuite modifié afin que la cage arrive au sommet du puits avec une vitesse nulle d'un mouvement uniformément retardé. La durée de la phase accélérée et celle de la phase retardée sont les mêmes

1.1 En prenant un axe vertical $x'x$ orienté vers le haut, comme origine de l'axe le fond du puits et comme origine des temps t = 0s, l'instant de départ au fond du puits, écrire les équations horaires du mouvement et tracer le diagramme des espaces.

1.2 Calculer la durée totale de la montée.
2-Calculer les intensités de la force de traction pendant la deuxième et la troisième phase.

3-Un corps de 2kg est suspendu à un dynamomètre placé dans la cage. Quelles sont les indications de ce dynamomètre pendant les trois phases du mouvement ?

Exercice 16

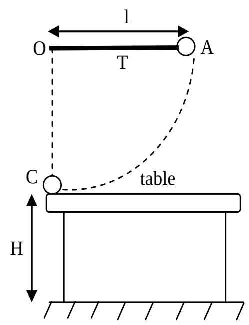
Un pendule est constitué par une bille, de masse m = 30g de dimension négligeable, supportée par un fil fin inextensible de 1métre de long. On le suspend au plafond d'un wagon.

1-Le wagon roule sur une voie rectiligne horizontale avec une vitesse constante égale à $72km.h^{-1}$. Au cours du parcours, le fil est coupé. Quelle est la trajectoire de la bille pour un observateur se trouvant dans le wagon et pour un observateur à l'extérieur du wagon ayant une position fixe par rapport à la Terre ?

2-Le wagon est animé d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération $a = 1m.s^{-2}$. Quelle est la valeur de l'angle d'inclinaison que fait le fil avec la verticale ? Quelle est la valeur de la tension du fil ? ($g = 10m.s^{-2}$)

Exercice 17

Une tige T, de longueur l et de masse négligeable, est mobile autour d'un axe horizontal passant par O et perpendiculaire au plan de la figure ci-contre. A l'extrémité A de cette tige, on fixe une bille de masse $m_1 = 4m$, supposée ponctuelle. La tige étant horizontale ; on l'abandonne sans vitesse initiale. On négligera les frottements dus à l'air.



1- Quelle est la vitesse de la bille A au passage par la positon d'équilibre ?

A.N: $OA = l = 20cm$; $g = 10m/s^2$

2- Lors du passage en cette position, la bille A rencontre une bille C supposée ponctuelle, de masse $m_2 = 6m$, placée sur le bord d'une table. Quelles sont les vitesses de A et de C, considérées comme colinéaires, après un choc parfaitement élastique ?

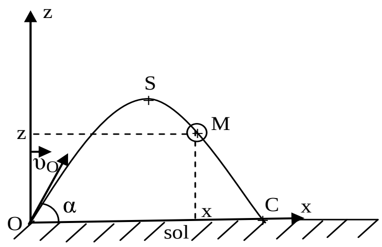
Faire l'application numérique.

3. La bille C se trouve, avant le choc, à la hauteur H au – dessus du sol. Étudier la nature du mouvement de C après le choc. Établir l'équation de la trajectoire de la bille C dans un système d'axes que l'on précisera. A quelle distance de la verticale du point O va – t – elle rencontrer le sol supposé horizontal ? Avec quelle vitesse touchera – t – elle le sol ? A.N : H = 1m

4. Quel est l'angle maximal de remontée de A après le choc ?

Exercice 18

Sachant que l'énergie mécanique $E = Ec + Ep_p$ pour un projectile dans le champ de pesanteur en n'étant soumis qu'à son poids se conserve.



1-Exprimer l'énergie cinétique Ec en M du projectile en fonction de sa masse m, de sa vitesse initiale υ_0 et de l'altitude z.

2- Déterminer la flèche du tir, la vitesse υ_s au sommet S et la vitesse υ_c au point C du plan horizontal passant par le point O.

Prendre comme position de référence, ce plan horizontal contenant l'axe Ox.

3- Pour quelle valeur de α la portée est-elle maximale ?

Exercice 19

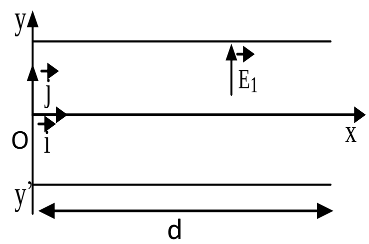
1. Un proton initialement au repos est soumis à un champ électrique uniforme $\vec{E}$. Déterminer :

1.1 la nature du mouvement et son équation horaire ;

1.2 en fonction de m, e, E, l, la vitesse et l'énergie cinétique acquises par ce proton après un parcours de longueur l.

A.N : m = 1,673.10^{-27}Kg, e = 1,6.10^{-19} C, l = 1cm et E = 2.10^{5} V/m

2. Le proton est, ensuite, lancé suivant une vitesse $\vec{v}_0$ entre les armatures horizontales de longueur d d'un condensateur plan entre lesquels règne un champ électrique $\vec{E}_1$ vertical orienté vers le haut.



2.1Déterminer, en fonction de m, v_0, E, e, l'équation de la trajectoire du proton dans le repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

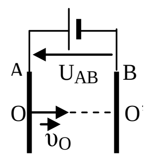
2.2 En déduire les coordonnées du point C où le proton sort du champ électrique.

A.N : d = 10cm, $E_1 = 30\ 000$V/m et $v_0 = 10^{6}$m/s

3. Un proton lancé à la vitesse $v_1 = 10^{7}$m/s heurte un noyau d'hélium au repos de masse m' = 6,646.10^{-27}Kg. Sachant que toutes les vitesses sont colinéaires et que le choc est parfaitement élastique, déterminer les vitesses $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_2'$ du proton et du noyau d'hélium après le choc.

Exercice 20

Un proton H^+, de masse m = 1,67.10^{-27}kg, animé d'une vitesse $\vec{v}_0$ (v_0 = 1500km.s^{-1}), pénètre entre deux plaques parallèles A et B, distantes de 10,0cm, entre lesquelles est appliquée la tension U_{AB} = +10,0kv. Le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ est orthogonal au plan des plaques (schéma ci-contre).



1-Représenter le vecteur champ électrique $\vec{E}$ entre les deux plaques.

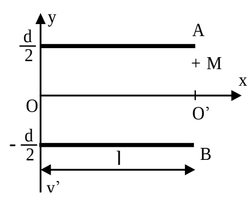
2-Calculer E de ce champ.

3-Établir la relation entre le vecteur accélération $\vec{a}$ du proton et le vecteur champ électrique $\vec{E}$.

4-Déterminer l'équation horaire du mouvement du proton entre O et O'. En déduire la nature de son mouvement.

Exercice 21

Un faisceau de particules α (He^{2+}) pénètre en O, à la vitesse $\vec{v}_0$, dans un champ électrique $\vec{E}$ créé par deux plaques horizontales A et B soumis à une tension U_{AB} = U = 600V et séparées de



d = 3cm. La vitesse $\vec{v}_0$, fait un angle θ = 30° avec ox et on veut que le faisceau sorte en M du champ parallèlement à ox.

Données : l = 3cm ; charge élémentaire e = 1,6.10^{-19}C ; masse d'une particule α : m = 6,64.10^{-27}kg.

1-Représenter le champ électrique $\vec{E}$ et la force électrique $\vec{f_e}$ qui s'exerce sur une particule α.

2-Sur un schéma, tracer l'allure de la trajectoire du faisceau. On négligera le poids des particules.

3-Établir l'équation $y = f(x)$ de cette trajectoire. En déduire la valeur numérique de $\vec{v}_0$.

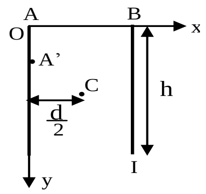
Prendre : tan 30° = 0,6 ; sin 60° = 0,9.

4-Quelle est la nature du mouvement d'une particule α à la sortie du champ $\vec{E}$?

5-Calculer la vitesse de la particule à la sortie en M en utilisant la conservation de l'énergie totale.

Exercice 22

Deux plaques métalliques parallèles A et B, verticales et placées dans le vide, sont distantes de d. Entre les deux plaques est imposée une tension U_{AB}. Une petite boule de masse m qui porte une charge q négative est lâchée de l'extrémité supérieure O de la plaque. On ne peut pas négliger le champ de pesanteur g.



On donne : $g = 10 m.s^{-2}$; $q = -10^{-7}C$; m = 100g ; d = 7cm ; h = 80cm.

1-Quel doit être le signe de la tension U_{AB} pour que la boule décolle sans vitesse initiale de la plaque A ?

Représenter le champ électrique $\vec{E}$.

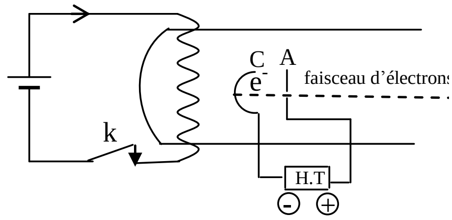
2-Déterminer la nature de la trajectoire et donner son équation.

3-Calculer la valeur de la tension pour que la boule passe par l'extrémité I du condensateur.

4-Déterminer la vitesse v_I au point de sortie I.

5-Calculer la tension $U_{A'C}$.

Exercice 23



1-Dans un canon à électron d'un oscillographe, les électrons sont émis de la cathode avec une vitesse initiale υ_C négligeable. On applique entre l'anode A percée et la cathode C, une tension accélératrice $U_0 = U_{AC} =$ 1000V.

Calculer l'énergie cinétique et la vitesse des électrons traversant l'anode (en utilisant le principe de conservation de l'énergie totale).

2- Les électrons de vitesse υ_A sont ensuite déviés en passant entre les plaques de l'oscillographe par une tension U. Montrer que la déviation observée est proportionnelle au rapport : $\frac{U_0}{U}$

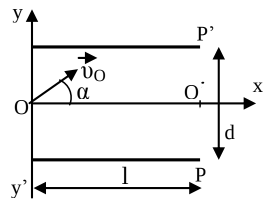
Donnée : masse d'un électron : $9{,}1.10^{-31}$kg

Exercice 24

Dans un canon à électron la d.d.p entre l'anode et la cathode est 800V. La vitesse des électrons au niveau de la cathode est nulle. Dans l'hypothèse d'un champ électrostatique uniforme existant entre les électrodes planes et parallèles distantes de 5cm, indiquer la nature du mouvement des électrons. Déterminer la valeur de la force électrique qui s'exerce sur un électron ainsi que l'accélération du mouvement et la durée du parcours entre la cathode et l'anode.

Exercice 25

Entre deux plaques P et P' d'un condensateur plan, des électrons de même charge q = -e et de même masse m pénètrent en O avec la même vitesse initiale $\vec{v}_0$. Le vecteur $\vec{v}_0$ est dans le plan (x0y) et fait un angle α avec l'axe x. Le champ électrique $\vec{E}$ est créé par une tension constante $U_{PP'}$ = U>0 appliquée entre les deux plaques, la longueur des plaques est l, leur distance est d.



1-Exprimer la relation entre le vecteur accélération $\vec{a}$ et le champ électrique $\vec{E}$.

2- Exprimer, en fonction de U, υ_0, d, α, e, et de la date t, les coordonnées des vecteurs suivants :

$\vec{a}$ (vecteur accélération), $\vec{v}$ (vecteur vitesse), $\overrightarrow{OM}$ (vecteur position) de l'électron à la date t.

3- Établir l'équation cartésienne de la trajectoire des électrons.

4-Exprimer les coordonnées du point M où le vecteur vitesse devient parallèle à l'axe Ox.

En déduire la relation liant υ_0, α, U, e et m pour que l'électron ne soit pas capté par la plaque supérieure.

5- On veut que les électrons ressortent en O'.

5.1 Déterminer la tension U à appliquer entre les deux plaques en fonction de α, l, d, υ_0, m et e.

5.2 Les électrons ressortent en $0'$ avec une vitesse $\vec{v}_{O'}$ qui fait un angle θ avec l'axe Ox. Comparer $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_{O'}$ ainsi que θ et α.

5.3 Calculer la valeur de U pour que l'électron ressorte en O'.

On donne : $\upsilon_0 = 8.10^6 m.s^{-1}$; α = 30° ; d = 7cm ; l = 20cm ; e = $1,6.10^{-19}$C ; m = $9,1.10^{-31}$kg

Exercice 26

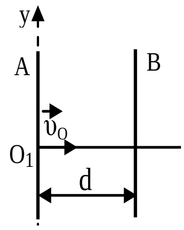


fig.a

Dans tout l'exercice, on suppose que le mouvement des ions a lieu dans le vide et on néglige le poids des ions devant la force électrique.

Un condensateur plan est constitué de deux plaques métalliques parallèles, verticales, distantes de d = 10cm (fig.a). On établit entre les deux plaques une différence de potentiel u_{AB}= 2.10^4V.

1-Donner les caractéristiques du vecteur champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur du condensateur et le représenter.

2-Un faisceau homocinétique d'ions sulfures S^{2-} pénètre dans le condensateur en O_1 avec une vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire aux plaques.

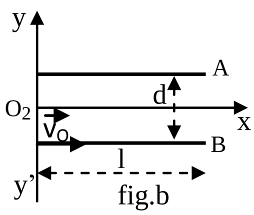


fig.b

2.1 Établir, dans le repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) les équations horaires du mouvement d'un ion.

2.2 A quelle distance de O_1 les ions rebroussent-ils chemin ?

Données : $v_0 = 4,5.10^5 m.s^{-1}$; masse de l'ion sulfure : m = $5,32.10^{-26}$kg ; charge élémentaire : e = $1,6.10^{-19}$C

2.3 Avec quelle vitesse $\vec{v}'$ les ions repassent-ils en O_1?

3-Le faisceau homocinétique d'ions sulfures pénètre maintenant avec la vitesse $\vec{v}_0$, parallèle aux armatures, dans le condensateur en un point O_2 équidistant des deux plaques.

La tension u_{AB} est positive et leur distance est d (fig. b).

Les ions ressortent de l'espace compris entre les armatures en un point M d'ordonnées y_M.

En appliquant la conservation de l'énergie totale, calculer la valeur v_M de la vitesse des ions en M.

Données : $u_{AB} = 2.10^4$V ; d = 10cm ; $y_M = 4$cm ; $\upsilon_0 = 4,5.10^5$ m.s^{-1} ; l = 20cm

__Exercice 27__

A quelle distance de la Terre le champ gravitationnel de celle-ci compense-t-il celui de la Lune ? La distance entre la Terre et la Lune est $3,84.10^8$m. Le rapport des masses des deux planètes vaut : $\frac{M_T}{M_L} = 8$

__Exercice 28__

On rappelle qu'à l'altitude h, l'accélération de pesanteur est donnée par la relation :

$g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$ où g_0 est l'accélération de pesanteur au niveau du sol et R est le rayon terrestre.

Données : g_0= 9,81m.s^{-2} et R = 6400km

1- Établir cette relation en tenant compte que la Terre est à répartition sphérique de masse.
2- Une fusée de masse totale initiale M (masse du satellite y comprise) possède un étage supérieur qui peut être satellisé autour de la Terre. Dans tout l'exercice, on néglige la résistance de l'air.

2.1 La poussée exercée par le moteur à réacteur du premier étage de la fusée étant $\vec{F}$, déterminer l'accélération initiale de la fusée qui part verticalement. A.N : M = 200t, F = 24.10^5N.

2.2 A l'altitude h, la fusée a déjà brûlé une masse M' de combustible. Entre le départ et l'altitude h, la trajectoire est rectiligne et verticale. La poussée ayant conservé la même valeur F qu'au départ.

2.2.1 Montrer que, si h est petite devant R, l'expression de l'accélération de pesanteur en fonction de h peut s'écrire : $g = g_0\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$

2.2.2 Quelle est la nouvelle valeur de l'accélération ?

A.N : M' = 120t ; h = 40km

2.3 Arrivée à l'altitude h_1, la fusée libère l'étage supérieur et le satellite de masse m est placé sur une orbite circulaire située dans le plan équatorial terrestre. Déterminer la vitesse linéaire du satellite dans un référentiel géocentrique et sa période de révolution. Que peut-on en conclure ?

A.N : m = 300kg, h_1 = 36000km

__Exercice 29__

Un satellite a une orbite circulaire de rayon r = 18000km située dans le plan équatorial. Il se déplace vers l'Est. La période de rotation de la Terre, par rapport au référentiel géocentrique, est de 86164s.

1-Calculer la période du satellite dans le référentiel géocentrique.

Déterminer, pour un observateur terrestre, l'intervalle de temps T_a (période apparente) qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point de l'équateur

Données : $R_T = 6370$km, g_0 (au sol) = 9,8m.s^{-2}

2-Calculer sa vitesse et son accélération par rapport au référentiel géocentrique.

Exercice 30

La valeur du champ de gravitation terrestre est donnée par la formule : $g = K\,\frac{M}{(R+h)^2}$

1/ 1.1-Quelle est la signification de chacune des lettres intervenant dans cette formule ? Préciser l'hypothèse envisagée pour exprimer la valeur de $\vec{g}$? Représenter $\vec{g}$.

1.2-Déterminer l'expression de g en fonction de R, h et g_0 (valeur du champ gravitationnel au sol).

2/ Dans le référentiel géocentrique, un satellite artificiel de masse m décrit, autour de la Terre, une orbite circulaire de rayon r = R + h.

2.1-Définir le référentiel géocentrique.

2.2-Montrer que le mouvement circulaire de ce satellite est uniforme.

2.3-Définir la période de révolution T de ce satellite.

Déterminer son expression en fonction de g_0, R, et h. Calculer sa valeur en heures et minutes.

Données : g_0 = 9,80m.s^{-2}, R = 6,38.10^{3}km ; G = 6,67.10^{-11}N.m^2.kg^{-2}, h = 800km.

Exercice 31

Le mouvement d'un satellite de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique. La Terre est supposée sphérique, de centre O, de rayon R et de masse M. Le satellite est assimilé a un point matériel de masse m décrit la trajectoire circulaire de rayon r autour de O dans le plan équatorial terrestre.

1-Exprimer l'énergie cinétique du satellite en fonction de M, m, r et G (constante de gravitation).

2-L'expression de l'énergie potentielle d'un satellite, lancé depuis la Terre, dans le champ de pesanteur est :

$$E_p = -K\,\frac{M.m}{r} \quad \text{avec } E_P = 0 \text{ pour r infini.}$$

2.1-Établir cette expression de E_P en commençant par le calcul du travail élémentaire dW du poids, force intérieure, du satellite pour un déplacement élémentaire de son centre d'inertie de r à r + dr.

-Comment varie E_P en fonction de r ? Exprimer l'énergie mécanique du satellite.

2.2-Quelle énergie mécanique minimale doit-on fournir au satellite depuis un point de lancement de l'équateur pour le mettre sur l'orbite à l'altitude h, en négligeant les frottements dus à la résistance de l'air. Calculer sa valeur avec G = 6,67.10^{-11} S.I,

M = 6.10^{24}kg, R = 6 400km (rayon terrestre), m = 10^{3}kg, h = 35 800km.

Exercice 32

Un pendule formé d'une petite sphère très dense suspendue à un fil inextensible est assimilable à un pendule simple de longueur l = 75cm. Il oscille sans amortissement appréciable en un lieu où l'accélération due à la pesanteur est g = 9,80m.s^{-2}. L'élongation α (angle que fait, à l'instant t, le fil avec la verticale) a pour maximum $\alpha_m = \frac{1}{100}$ rad. Elle est nulle à la date t = 0s.

1- Établir que la période du pendule simple est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

2- Écrire l'équation horaire du mouvement.

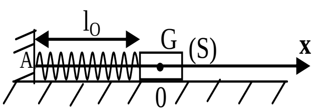
3- Calculer l'instant θ du premier passage pour l'élongation $\frac{1}{200}$ rad.

4- Calculer la vitesse angulaire du pendule à la date t et à la date 0s.

5- Déterminer la valeur de la tension du fil à la date t. La calculer lorsque t = 0s.

En déduire la valeur du poids apparent de la petite sphère à la date t = 0s.

Exercice 33



A l'équilibre, le centre d'inertie G de S se trouve en 0, origine de l'axe Ax. (S) peut se déplacer sans frottement sur une surface plane et horizontale. On écarte le mobile (S) de sa position d'équilibre et on le lâche. A l'instant t= 0, choisi pour origine des dates, son abscisse est

x (0) = +2cm et la valeur algébrique de la vitesse sur Ax est $\dot{x}$ (0) = υ_x (0) = - 0,2m.s^{-1}. Sachant que la raideur du ressort k = 10N.m^{-1}, g = 10m.s^2, la masse du solide m = 100g et Ep = 0 pour

x = 0.

1- Calculer l'énergie mécanique de l'oscillateur à l'instant t =0.

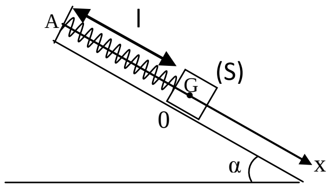
2- En appliquant la conservation de l'énergie mécanique :

2.1 Calculer : - la vitesse G au passage par la position d'équilibre pour x = 0,

- les positions de G pour lesquelles sa vitesse s'annule.

2.2 Établir l'équation différentielle du mouvement de G. En déduire l'équation horaire du mouvement de G.

Exercice 34



Un petit solide S de masse m et de centre d'inertie G peut se déplacer sans frottement sur le plan incliné.

1-Quand S est au repos, la longueur du ressort est l et le point G coïncide avec O. Déterminer, lorsque S est au repos, l'expression de l'allongement A_0 du ressort en fonction de k, m, g et α.

A.N : k = 10N.m-1, m = 25g, α = 30°

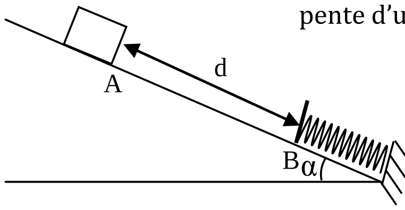
2-En tirant sur le ressort de façon que son axe demeure parallèle à une droite de plus grande pente du plan incliné, on écarte S de sa position d'équilibre de 4cm. A la date t =0s, on libère en le laçant vers le haut avec une vitesse de valeur algébrique $\dot{x}$ (0)= - 0,1m.s^{-1} Des oscillations prennent naissance.

2.1- Donner l'expression de l'énergie mécanique du système {Ressort – solide – Terre} au cours de son mouvement vers la position d'équilibre en fonction de m, k, A_0, x et $\dot{x}$. (l'énergie potentielle de pesanteur nulle étant en O et l'énergie potentielle élastique est nulle lorsque le ressort à une longueur à vide l_0)

2.2- En déduire l'équation différentielle du mouvement de S et écrire l'équation horaire de son mouvement (le début des oscillations étant pris pour origine des dates).

Données : $\pi^2 \simeq 10$, $g = 10 m.s^{-2}$, $\sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha$ pour $\alpha < 0{,}17445 rad$

<u>Exercice 35</u>



Un objet de masse m peut glisser sans frottement suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale.

Du point A, il est abandonné sans vitesse initiale et vient heurter l'extrémité B d'un ressort idéal de raideur k, de longueur à vide l_0. Tous les frottements seront considérés comme nuls. En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique avec $Ep_e = Ep_p = 0$ en B.

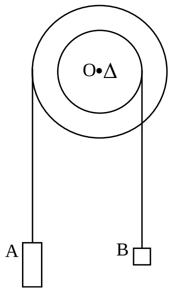
1- Calculer la longueur l du ressort lorsque l'objet atteint l'altitude minimale.

2- Déterminer la période des oscillations sachant que l'objet s'accroche au ressort.

Données : $\alpha = 30°$; $m = 0{,}15 kg$, $k = 100 N.m^{-1}$, $AB = d = 1{,}50 m$, $g = 9{,}81 N.kg^{-1}$, $l_0 = 50{,}0.10^{-2} m$

SOLIDE EN ROTATION

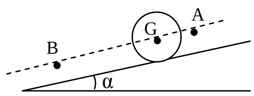
<u>Exercice 1</u>



Une poulie de masse négligeable, formée de deux cylindres C et c coaxiaux de rayons R=20cm et r = 10cm peut tourner autour d'un axe horizontal Δ passant par son centre O. Elle supporte un fil inextensible qui ne glisse pas. Aux extrémités du fil sont suspendus deux corps A ($m_A = 800g$) et B ($m_B = 100g$). Les frottements, appliqués à la périphérie de la poulie de rayon R, ont une action équivalente à un couple d'intensité $2.10^{-2}N$ s'opposant à la rotation de cette poulie à deux gorges. Calculer l'accélération a du mouvement du corps A.

Déterminer l'équation horaire du centre d'inertie G de A et celle de la poulie.

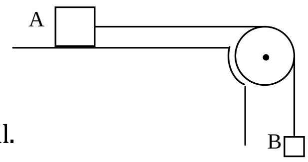
<u>Exercice 2</u>



Le cylindre plein roule sans glisser sur une pente de 2%. Calculer a_G, en appliquant :

- le T.A.A et le T.C.I sachant que $\upsilon_A = 0$ et $R = 2cm$. Prendre $g = 10 m.s^{-2}$,
- le T.E.C.

<u>Exercice 3</u>



<u>Poulie</u> : cylindre plein et homogène de masse $M = 0{,}5 kg$ et de rayon $R = 10 cm$

<u>Corps A</u> : masse $m_A = 1 kg$ pouvant glisser sans frottement sur le plan horizontal.

<u>Corps B</u> : masse $m_B = 0{,}25 kg$. Prendre $g = 10 m.s^{-2}$

1- En utilisant le T.E.C, déterminer la vitesse du corps A après un déplacement de 1m.

2- Calculer l'accélération du corps A.

3- Calculer l'intensité de la force exercée par le fil sur le corps A. La comparer au poids du corps B. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4

Un cylindre horizontal homogène de masse $M = 20kg$, de rayon $r = 10cm$ mobile autour de son axe de révolution Δ supporte un solide S de masse $m = 10kg$ par l'intermédiaire d'une corde enroulée sur la surface du cylindre.

1-Le solide, partant du repos, tombe d'une hauteur de 3m entraînant la rotation du cylindre. En négligeant la masse de la corde et les résistances passives, calculer la vitesse en fin de la chute et l'accélération du solide ainsi que la durée de cette chute.

2-A la fin de cette chute, la corde quitte le cylindre, celui-ci se trouve alors soumis à un couple résistant de moment constant qui l'arrête après une rotation de 100tours.

2.1 Montrer que le cylindre est en mouvement de rotation uniformément varié.

2.2 Calculer le moment de ce couple, l'accélération angulaire et la durée du freinage ($g = 10m.s^{-2}$).

Exercice 5

Une poulie formée de deux cylindre C et C' coaxiaux de rayons $R = 20cm$ et $r = 10cm$ peut tourner autour d'un axe horizontal passant par son centre O. Le moment d'inertie de la poulie est $J_0 = 0,08kg.m^2$.

1- On enroule sur le cylindre C un fil à l'extrémité duquel est suspendu un solide S de masse $M = 2kg$. L'ensemble est abandonné sans vitesse initiale.

1.1 Quelle est la nature du mouvement du centre d'inertie de ce solide?

1.2 Calculer le temps théorique t_h mis par le solide pour parcourir la distance $d = 5m$. En réalité, cette distance n'est parcourue qu'au bout de $t=\sqrt{3}$ s. Calculer le moment du couple résistant $\mathbf{M}_r$ supposé constant qui s'oppose au mouvement de rotation de la poulie.

1.3 Lorsque le solide S a parcouru la distance 5m, le fil se détache du cylindre sachant que $\mathbf{M}_r$ s'exerce toujours sur le levier de la poulie. Calculer le temps d'arrêt t_a et le nombre de tours effectués depuis le moment où le fil se détache jusqu'à l'arrêt complet de la poulie.

2- On remet en place S et on enroule sur le cylindre C'un fil à l'extrémité duquel est attaché un ressort de constante de raideur

$k = 196N.m^{-1}$. Le ressort est vertical et son extrémité inférieure est fixe. On néglige $\mathbf{M}_r$.

2.1 Calculer l'allongement du ressort à l'équilibre.

2.2 On tire verticalement S et on l'abandonne. Écrire l'équation différentielle du mouvement. Montrer que le centre d'inertie G de S de masse M a un mouvement rectiligne sinusoïdal. Calculer la période de son mouvement.

Exercice 6

Une roue de bicyclette pesant environ 2000g est parfaitement centrée sur son moyeu et l'axe de rotation maintenu horizontal. On fixe en un point de la jante une surcharge de masse égale à celle de la roue. Plaçant cette roue de façon que la surcharge soit écartée d'environ un dixième de radian du diamètre vertical, on abandonne l'ensemble à lui-même.

1-Décrire le phénomène observé.

Établir l'équation horaire du mouvement en supposant la masse de la roue uniformément répartie sur une circonférence sans épaisseur de 56cm de diamètre et la surcharge concentrée en un point de la jante. Déduire de cette équation une valeur approchée de la période des oscillations.

2-Calculer la masse qu'il convient de donner à la surcharge pour que la roue « batte la seconde » à la façon d'un pendule simple de 1m de longueur ($g = 9{,}80 m.s^{-2}$).

Exercice 7

Une tige homogène horizontale BD de longueur $l = 20cm$ est fixée en son milieu O à un fil de torsion vertical OA. La période de ce pendule de torsion est $T_0 = 10{,}2s$.

On place en B et D deux corps ponctuelles de masses respectives m et m' de valeur 6,25g chacune. La période devient $T_1 = 10{,}7s$. Calculer le moment d'inertie de la tige BD par rapport à l'axe OA et la constante de torsion C du fil.

Exercice 8

Prendre : $g = 10 m.s^{-2}$, $\pi^2 \simeq 10$ et on rappelle que $P = \frac{dW}{dt}$

I/ Un disque homogène de rayon R, comportant un trou circulaire de rayon $\frac{R}{2}$ qui lui est concentrique, a une masse M.

I-1 Établir en fonction de M et de R son moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ perpendiculaire à son plan et passant par son centre O. Calculer M si R = 10cm et que $J_\Delta = 5.10^{-3} kg.m^2$.

I-2 Ce disque peut tourner autour de l'axe Δ sous l'action d'un couple moteur qui développe une puissance $P = At$ où

$A = 0{,}5 w.s^{-1}$. On suppose tous les frottements négligeables. Exprimer, en fonction du temps t, le travail de ce couple moteur, en supposant que ce travail est nul à l'instant initial.

I-3 Partant de repos à l'instant initial, au bout de combien de temps le disque atteindra-t-il la vitesse de $20 tr.s^{-1}$?

I-4 Quelle est l'accélération angulaire du mouvement ?

II/ On enlève le moteur précédent, le disque peut maintenant osciller dans un plan vertical autour d'un axe horizontal Δ', passant par un point se trouvant à la distance $\frac{R}{2}$ de son centre. On fixe l'une des extrémités d'un ressort spiral de constante de torsion C à l'axe Δ', l'autre extrémité est fixée en un point N du disque.

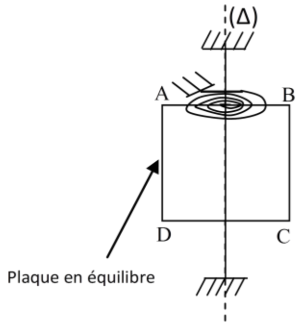
II-1 Établir l'équation différentielle du mouvement du disque troué dans le cas des oscillations de faible amplitude. Sachant que le ressort spiral n'est pas déformé lorsque l'élongation angulaire, par rapport à la verticale, est nulle.

II-2 On constate que la durée de 10 oscillations est de 6,28s. Calculer la constante de rappel C du ressort spiral.

II-3 On écarte maintenant le disque troué de 60° de la position verticale d'équilibre puis on l'abandonne sans vitesse. Le ressort spiral se casse quand le système repasse par la position verticale. De quel angle le disque s'écarte-t-il de la position verticale avant de rebrousser chemin.

Exercice 9

Soit une plaque homogène de masse M ayant la forme d'un carré de côté l dont on pourra négliger l'épaisseur. Elle peut tourner librement autour d'un axe vertical Δ passant par les milieux de ses côtés AB et CD.



1- Montrer que le moment d'inertie de cette plaque par rapport à l'axe Δ est : $J_\Delta = \frac{1}{12} Ml^2$

A.N : M = 1,20kg ; l = 10cm

2- On fixe, sur l'axe Δ et sur le côté supérieur AB de la plaque, un ressort spiral qui exerce, à chaque instant, un moment de rappel de la forme avec $\mathcal{M}_r = -C\alpha$ les conventions usuelles d'orientation, C est la constante de torsion du ressort et α est l'élongation angulaire par rapport au plan de la figure.

2.1 Montrer que le mouvement de rotation de la plaque est sinusoïdal.

2.1 Calculer la constante de torsion C sachant que la période des oscillations est T = 2s.

2.3 On écarte la plaque de α = 30° puis on l'abandonne. Calculer sa vitesse angulaire lors de son passage par la position d'équilibre (α = 0).

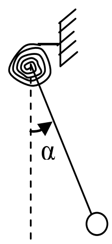
3- On exerce sur l'axe un couple de frottement dont le moment par rapport à l'axe Δ est de la forme $\mathcal{M}_f = -k\dot{\alpha}$ proportionnel et de sens contraire à la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$

3.1 Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

3.2 Montrer que la variation élémentaire dE de l'énergie mécanique de la plaque est égale au travail élémentaire dW_f du couple de frottement.

Exercice 10

Une barre homogène de section constante, de masse m et de longueur 2l, est mobile dans un plan vertical autour d'un axe Δ horizontal passant par l'une de ses extrémités O. On fixe à l'autre extrémité une masselotte de masse $\frac{m}{3}$ considérée comme ponctuelle. Un ressort spiral de constante de torsion C exerce un couple de moment de rappel $\mathcal{M}_r = -C\alpha$ avec les conventions usuelles d'orientation. A l'équilibre, la tige est verticale (α = 0°). On écarte le système de cette position.



1-Calculer l'énergie potentielle du système {Tige – masselotte} en fonction de α sachant que :
- l'énergie potentielle de pesanteur est nulle à la position la plus basse de la masselotte
- l'énergie potentielle élastique est nulle pour α = 0°.

2-Calculer l'énergie mécanique du système {Tige – masselotte}

3-En déduire l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur dans le cas des petites oscillations.

4-Calculer la période propre des petites oscillations.

Données : g = 9,8m.s^{-2} ; m = 100g ; l = 20cm ; C = 0,25Nm.rad^{-1} ; pour α (rad) petit, $cos\alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$

Exercice 11

Une tige homogène horizontale BD de longueur l = 20cm est fixée en son milieu O à un fil de torsion vertical OA. La période de ce pendule de torsion est T_0 = 10,0s. On place en B et en D deux corps ponctuels de masses m et m' de 6,25g chacun. La période devient T_1 = 10,7s. Calculer le moment d'inertie de la tige BD par rapport à l'axe OA et la constante de torsion C du fil.

Exercice 12

On dispose d'un disque homogène de masse M et de rayon R. Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de révolution Δ est $J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$. On suspend ce disque par son centre O, à un fil de torsion vertical fixé à sa partie supérieure, en un point O'. A partir de sa position d'équilibre, on fait tourner le disque autour de OO' d'un angle α_m dans un sens choisi comme sens positif, puis on l'abandonne sans vitesse initiale à la date t = 0s. Il prend alors un mouvement de période T.

1-Établir l'équation horaire du mouvement pris par le disque.

A.N: α_m = 1rad, T = 2s

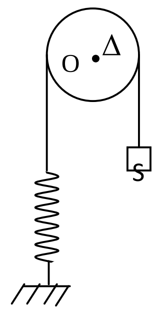
2-Déterminer la vitesse angulaire et l'énergie cinétique du disque lors du passage par la position d'équilibre.

A.N : M = 0,4kg, R = 0,1m.

3-Calculer la constante de torsion C du fil.

4-Comment l'énergie potentielle élastique et l'énergie cinétique se repartissent-elles lorsque $\alpha = \frac{\alpha_m}{2}$?

Exercice 13



La poulie de masse M = 80g, mobile sans frottement autour de l'axe horizontal Δ passant par O, a pour moment d'inertie : $J_\Delta = \frac{1}{2}M.R^2$

Le solide S de masse M' = 100g est pratiquement ponctuel. Le fil de masse négligeable est inextensible et la raideur du ressort est $k = 22{,}5 N.m^{-1}$.

1- Déterminer l'allongement A_0 du ressort quand S est en équilibre.

2-Établir l'équation différentielle du mouvement de S et en déduire la période T de son mouvement.

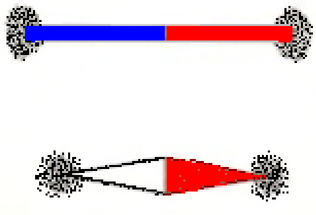
2 Electromagnétisme

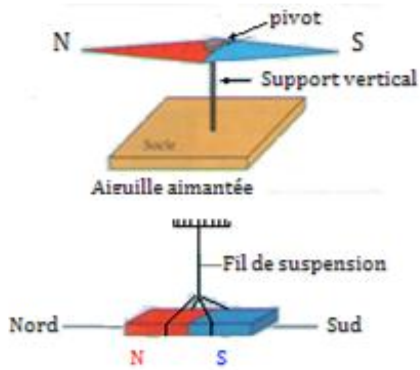
Chapitre 1 : Champ magnétique

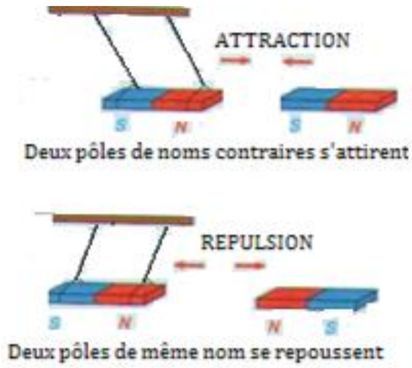
1- L'aimant

Les aimants sont des corps pouvant attirer des substances contenant du fer, du cobalt ou du nickel (substances magnétiques).
Exemple : la magnétite (Fe_3O_4) ; les électroaimants.

1-1- Pôles d'un aimant – Interaction entre pôles







l'aimantation est plus forte aux deux extrémités appelées pôles

le **pôle Nord** et le **pôle Sud.**

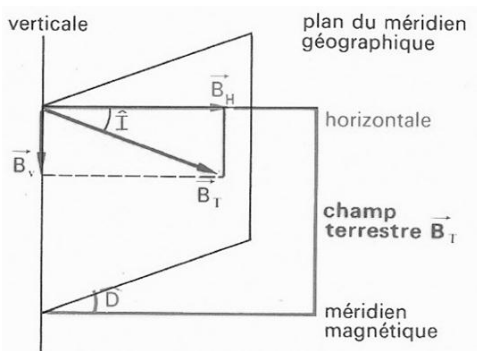
1-2- Mise en évidence d'un champ magnétique – Vecteur champ magnétique $\vec{B}$

Un champ magnétique est une région de l'espace où une petite aiguille aimantée, mobile autour d'un axe, est soumise à une force et prend une direction bien déterminée.

Tout point M d'un espace champ est caractérisé par un vecteur $\vec{B}$ défini par :

- Origine : point M
- Direction : celle prise par une aiguille aimantée placée en M
- Sens : celui du vecteur $\overrightarrow{SN}$ (sud → nord) de l'aiguille aimantée
- Module se mesure en tesla (T). (Composante horizontale du champ magnétique terrestre : $B_H = 2.10^5$T)

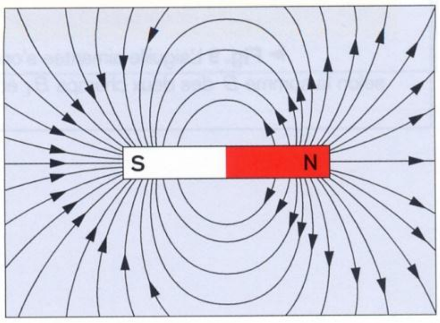
__Exemple :__ champ magnétique terrestre.

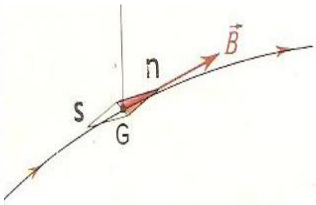


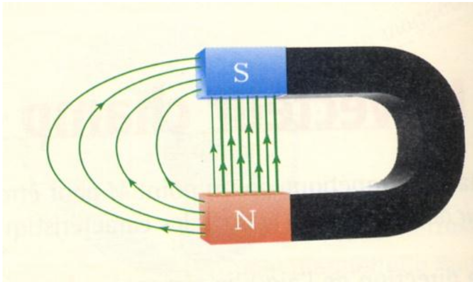
__Déclinaison__ $\widehat{\boldsymbol{D}}$: angle formé entre le méridien magnétique et le méridien géographique
__Inclinaison__ $\widehat{\boldsymbol{I}}$: angle formé entre le champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_T}$ et l'horizontale : $\overrightarrow{B_T} = \overrightarrow{B_H} + \overrightarrow{B_V}$ et $\hat{I} = (\widehat{\overrightarrow{B_H}, \overrightarrow{B_T}})$

1-3- Lignes d'induction – Spectre magnétique.

Les lignes d'inductions sont des courbes orientées tangentes en tous leurs points au vecteur champ magnétique $\vec{B}$, leur sens est celui de $\vec{B}$.
L'ensemble des lignes de champ, matérialisé par des lignes dessinées par la limaille de fer au voisinage d'un aimant, constitue le spectre magnétique.
Exemple : Spectre magnétique d'un aimant droit et d'un aimant en U.





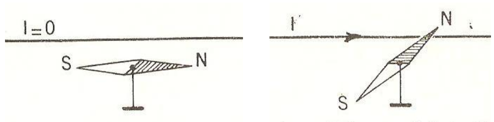


Champ magnétique uniforme.

Un champ magnétique est uniforme quand le vecteur induction $\vec{B}$ a même direction, même sens et même intensité en tout point de l'espace champ.
Les lignes d'induction d'un champ uniforme sont des droites parallèles.
<u>**Exemple :**</u> champ magnétique entre les branches d'un aimant en U.

2- Champ magnétique créé par un courant.

2-1- Existence (expérience d'Oersted)



Au voisinage d'un fil parcouru par un courant existe un champ magnétique. L'expérience montre que : Le champ B créé par un courant est proportionnelle à l'intensité du courant I.

2-2- Sens de $\vec{B}$

a. <u>**Règle de la main droite.**</u>

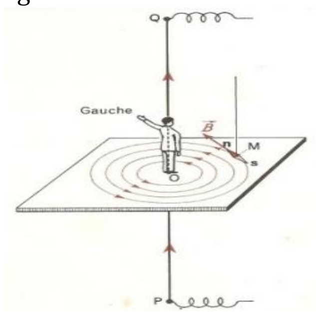
La main droite se place le long du fil, le courant rentrant par le poignet et sortant par le bout des doigts, la paume de la main se place face au point considéré, le pouce écarté de la main indique le sens du champ magnétique $\vec{B}$.

b. <u>**Règle de l'observateur d'Ampère**</u>

L'observateur d'Ampère, couché sur le conducteur de façon que le courant circule de ses pieds vers sa tête et regardant le point considéré : l'orientation de $\vec{B}$ en ce point est donnée par son bras gauche.

2-3- Champ d'un courant rectiligne infiniment long

Les lignes d'induction sont des circonférences centrées sur le conducteur. Les caractéristiques de $\overrightarrow{B_M}$ sont:

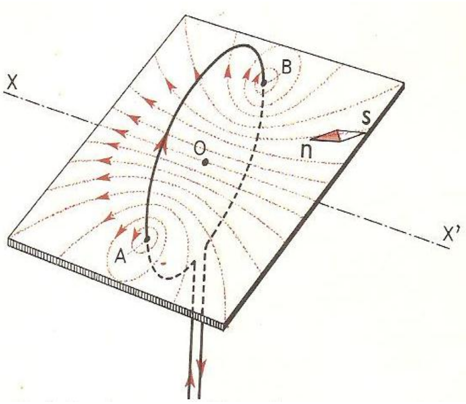


Direction : perpendiculaire au plan formé par le fil et le point M
Sens : donné par la règle de la main droite
Intensité :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{d}}$$

d : distance du point M au fil et
$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ *SI est la perméabilité magnétique du vide*

2-4- Champ magnétique crée par une bobine plate (spire circulaire)



Au centre de la bobine de rayon R comportant N spires, parcouru par un courant d'intensité I, les caractéristiques de $\vec{\mathbf{B}}$:

Direction : parallèle à l'axe de la bobine

Sens : donné par la règle de la main droite

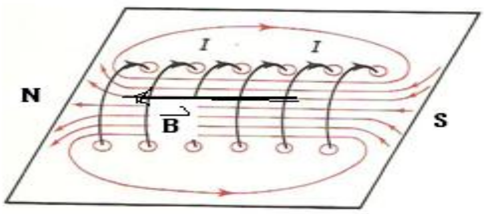
Intensité : $\boxed{B = \frac{\mu_0}{2}.\frac{N.I}{R}}$

R en mètre(m)

I en ampère (A)

B en tesla (T)

On observe le spectre magnétique dans un plan contenant l'axe de la bobine (plan méridien).



Champ magnétique créé par un solénoïde (bobine longue)

A l'intérieur d'un solénoïde de longueur l et comportant N spires, les lignes d'induction sont parallèles à l'axe, le champ est uniforme

Le sens du champ est donné soit par la règle de la main droite, soit .par la règle du tire bouchon.

L'intensité du champ est donnée par :

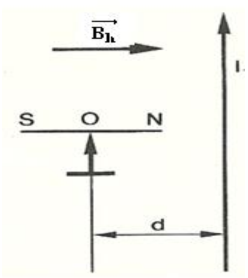
$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

l en mètre (m) ; I en ampère (A)

B en tesla (T)

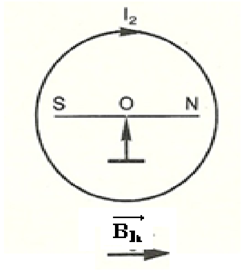
En posant n = $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{l}}$ le nombre de spires par unité de longueur, on a : $\boxed{B = \mu_0 . n . I}$

<u>Exercice résolu 1</u>



Une petite aiguille aimantée, de centre O, libre de tourner sans frottement dans un plan horizontal autour d'un axe vertical, s'oriente parallèlement à la composante horizontale $\vec{B_h}$ du champ magnétique terrestre.
On se propose de déterminer la valeur de cette composante.
Dans une première expérience, le centre O de l'aiguille est placé à une distance d = 5 cm d'un conducteur de cuivre rectiligne vertical très long, de telle sorte qu'en l'absence de courant dans le fil, l'aiguille et le fil soient dans un même plan vertical,

le pôle nord de l'aiguille étant dirigé vers le fil, l'axe de rotation de l'aiguille étant toujours vertical.



On fait passer dans le fil un courant ascendant d'intensité $I_1 = 5A$. L'aiguille tourne de 45°.

Représenter, vue de dessus, cette expérience par un schéma où figureront le fil, le sens du courant, les vecteurs champs magnétiques et l'aiguille. Calculer B_h

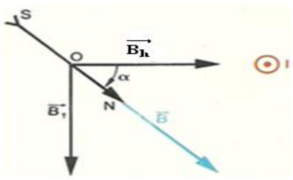
Dans une deuxième expérience, le centre O de l'aiguille est placé au centre d'un solénoïde d'axe horizontal, l'axe de rotation de l'aiguille étant toujours vertical. En l'absence de courant dans le solénoïde, l'axe de celui-ci est perpendiculaire à l'aiguille.

Ce solénoïde, comportant 1600 spires par mètre de longueur, est parcouru par un courant d'intensité $I_2 =$ 10 mA. L'aiguille dévie également de 45°.

a- Représenter, vue de dessus, cette expérience par un schéma où figureront le solénoïde, le sens du courant, les vecteurs champs magnétiques et l'aiguille.
b- Montrer que cette expérience confirme le résultat obtenu précédemment.
c- On fait croître progressivement l'intensité I du courant, déterminer l'angle α si I = 0,3 A. Conclure.

Solution

Lorsqu'un courant passe dans le fil rectiligne, l'aiguille est soumise est soumise à l'action d'un champ magnétique $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ qui est la superposition de deux champs :
Le champ magnétique terrestre $\overrightarrow{\boldsymbol{B_h}}$
Le champ créé par le fil $\overrightarrow{\boldsymbol{B_1}}$.
Le schéma ci-dessous représente la position de l'aiguille dans cette condition. L'aiguille tournant de 45°



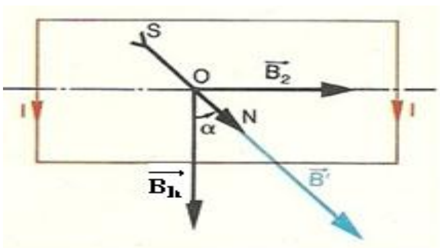
Nous avons la relation : $\boldsymbol{tan\ \alpha = \frac{B_1}{B_0} = tan\ 45° = 1}$ soit $B_h = \boldsymbol{B_1}$

Or le champ magnétique créé par le fil est $\boldsymbol{B_1 = 2.10^{-7}.\frac{I_1}{d}}$

Soit $\boldsymbol{B_1 = 2.10^{-7}.\frac{5}{5.10^{-2}} = 2.10^{-5}T}$ C'est-à-dire $\boldsymbol{B_0 = 2.10^{-5}T}$

A nouveau l'aiguille est soumise au champ magnétique terrestre $\overrightarrow{\boldsymbol{B_h}}$ et au champ créé par le courant électrique dans le solénoïde $\overrightarrow{\boldsymbol{B_2}}$. Elle s'oriente suivant $\overrightarrow{\boldsymbol{B'}}$ tel que : $\overrightarrow{\boldsymbol{B'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{B_h}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B_2}}$

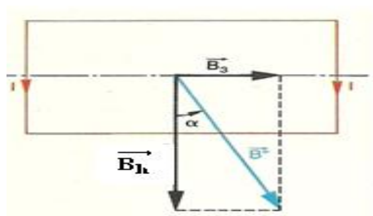
Comme le précise le schéma ci-dessous, l'aiguille tournant à nouveau de 45° nous avons : $\boldsymbol{B_2} = B_h$



Pour le solénoïde, l'intensité du champ magnétique créé en O est :

$$B_2 = 4\pi.10^{-7}.n.I_2 = 4\pi.10^{-7} \times 1600 \times 10.10^{-3}$$

soit $B_2 \simeq 2.10^{-5}T$
C'est-à-dire $B_h = 2.10^{-5}$ T



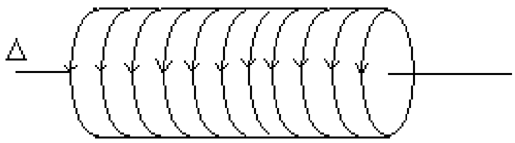
Les deux expériences conduuisent bien sûr au même résultat.
En faisant croître I de O à 1A, l'aiguille tourne d'un angle $\boldsymbol{\alpha}$ tel que :
$\mathbf{tan\ \alpha = \frac{B_2}{B_h}}$ où $B_3 = 4\boldsymbol{\pi}.10^{-7}.n.I$

Application numérique :$\boldsymbol{tan\alpha = \frac{4\pi.10^{-7} \times 1600 \times 0{,}3}{2.10^{-5}} = 30 \Rightarrow \alpha = 88°}$

On peut considérer que l'aiguille de la boussole a une direction confondue avec l'axe du solénoïde.

Exercice résolu 2

Un solénoïde (bobine cylindrique d'axe horizontal *Δ),* de grande longueur *ℓ* par rapport à son diamètre D, comporte une couche de fil, isolé par un vernis d'épaisseur négligeable, à spires jointives. Le diamètre du fil est *d.*



Exprimer, en fonction de l'intensité I du courant qui parcourt les spires, I' intensité B du champ magnétique créé par le courant au centre de la bobine. On donne : ℓ= 0,5 m, d = 0,5mm, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$S.I.

(μ_0: étant la perméabilité magnétique du vide, et aussi de l'air, avec une bonne approximation). Représenter sur un schéma le sens du courant dans les spires, et la direction et le sens du champ magnétique $\vec{B}$ correspondant.

L'axe *Δ* est perpendiculaire au méridien magnétique du lieu de l'expérience, et la composante horizontal du champ magnétique terrestre est : B_o=2.10^{-5}T.

Une petite aiguille aimantée $\overrightarrow{SN}$, mobile autour d'un axe vertical, et placée au centre de la bobine, s'établit dans une position d'équilibre telle que l'angle de la ligne des pôles $\overrightarrow{SN}$ et de l'axe *Δ* soit α = 60°. Quelle est l'intensité I du courant dans les spires?

On remplace le solénoïde précédent par une autre bobine de mêmes dimensions, mais comportant deux couches de fil à spires jointives, bobinées avec le même fil isole de diamètre *d.* L'axe *Δ'* de cette nouvelle bobine est encore normal au méridien magnétique du lieu de l'expérience, et la bobine est parcourue par un courant de même intensité I que celle calculée à la question 2°.

Quel angle d'équilibre α' forme l'aiguille aimantée placée au centre de la bobine avec l'axe Δ '?

Solution

a- Intensité B du champ magnétique

L'intensité B du champ magnétique créé par un solénoïde long de longueur $\boldsymbol{l}$ et comportant N spires est donnée par la relation : $\boldsymbol{B = \mu_0 \frac{N}{l} I}$

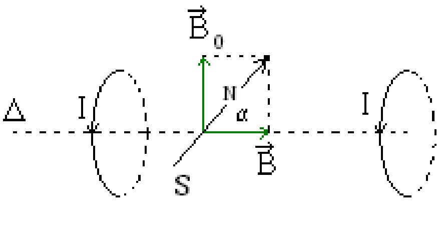
Chaque spire a un diamètre $\boldsymbol{d}$ et les spires sont jointives, le nombre de spires sur une longueur $\boldsymbol{l}$ est : a $\boldsymbol{N = \frac{l}{d}}$

Le champ B s'exprime donc par : $\boldsymbol{B = \mu_0 \frac{l}{l.d} I = \mu_0 \frac{1}{d} I}$

Application numérique : $\boldsymbol{d = 0,5.10^{-3} m}$

$\boldsymbol{B = 4 \times \pi \times 10^{-7} \times \frac{1}{0,5.10^{-3}} \times I}$ soit $\boldsymbol{B = 2,5.10^{-3} \times I\ T}$

b- Intensité I du courant dans les spires



L'aiguille aimantée s'oriente dans la direction de la somme du vecteur champ $\vec{B}$ créé par le solénoïde et du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_0}$. L'angle α est donné par :

$\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{B_0}{B} = \frac{B_0 \times 0,5.10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \times I}}$ Soit : $\boldsymbol{I = \frac{B_0 \times 0,5.10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \times \tan\alpha}}$

Application numérique : $\boldsymbol{\alpha = 60}$°

$\boldsymbol{I = \frac{2.10^{-5} \times 0,5.10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \times \tan 60°}}$;

c- Angle $\boldsymbol{\alpha'}$ de rotation de l'aiguille

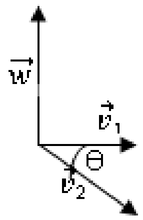
Le nombre de spires N' étant le double de N, le champ magnétique B' créé par cette bobine est le double du champ B :

$\boldsymbol{\tan\alpha' = \frac{B_0}{B'} = \frac{B_0}{2B} = \frac{\tan\alpha}{2}}$; alors $\boldsymbol{\tan\alpha' = \frac{\tan 60°}{2} = 0,87}$ Soit α'=40,9°

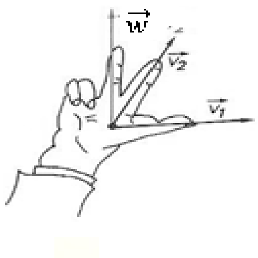
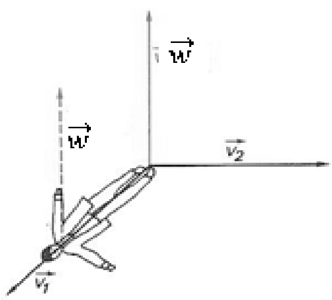
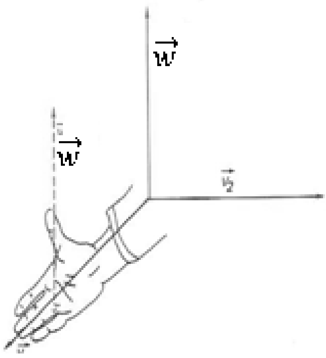
Chapitre 2: Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

1- Complément de mathématique : produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{v_1}$ ***et*** $\vec{v_2}$ est un vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$.
$\vec{w}$ a les caractéristiques :
Direction : orthogonale au plan défini par $\vec{v_1}$ ***et*** $\vec{v_2}$
Sens donné par les règles d'orientation de l'espace $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w})$ forme un trièdre direct.
$\|\vec{w}\| = \|\vec{v_3}\|.\|\vec{v_3}\|.|\sin\theta|$ avec $\theta = (\widehat{\vec{v_1}, \vec{v_2}})$



Le sens de $\vec{w}$ peut être obtenu par :

Trois doigts de la main droite	*Observateur d'ampère*	*Main droite*
 On fait coïncider le pouce et $\vec{v_1}$, l'index et $\vec{v_2}$, $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$ a un sens donné par le majeur	 L'observateur se couche suivant $\vec{v_1}$ et regarde suivant $\vec{v_2}$, , son bras gauche indique le sens de $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$	 La main est suivant $\vec{v_1}$, la paume est dirigée vers $\vec{v_2}$, le pouce indique le sens de $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$

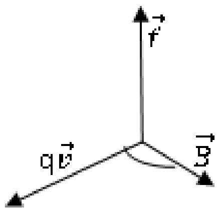
Propriétés du produit vectoriel :
$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = -\vec{v_2} \wedge \vec{v_1}$

$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v_1}, \vec{v_2}$ sont parallèles ou $\vec{v_1} = \vec{0}$ ou $\vec{v_2} = \vec{0}$

2- Force de Lorentz

Une particule de charge q, animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, subit une force $\vec{f}$ appelée force de Lorentz, tel que :

$$\boxed{\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$



D'après les règles du produit vectoriel :

sa direction est orthogonale au plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{B}$

Son sens est tel que le trièdre $q\vec{v}, \vec{B}, \vec{f}$ soit direct ;

Sa valeur est $f = |q| v B \, |\sin(\vec{v}, \vec{B})|$.

Remarque : la puissance de la force magnétique $P = \vec{f}.\vec{v} = 0$

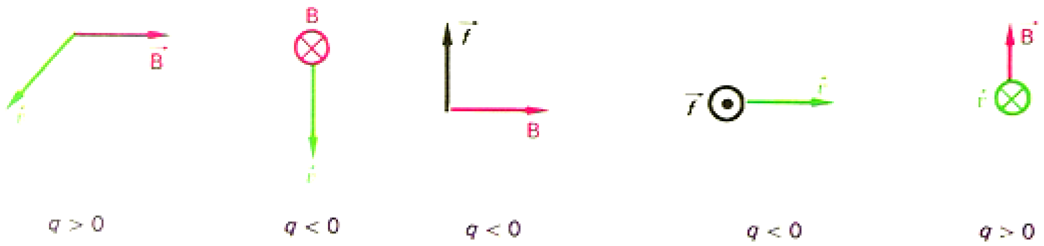
Convention :

⊗ vecteur orienté vers l'arrière plan de la figure

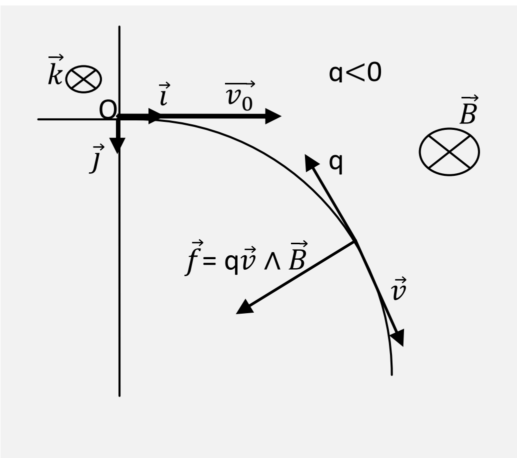
⊙ vecteur orienté vers l'avant plan de la figure

Application

Sur les schémas de la figure ci-dessous doivent figurer $\vec{v}, \vec{B}$ *et* $\vec{f}$, force de Lorentz. Sachant que $\vec{v}$ est toujours orthogonal à $\vec{B}$; déterminer la direction et le sens du vecteur qui est absent.



3- Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique



Dans tout ce qui suit, le poids de la particule est négligeable devant la force magnétique.

La particule de charge q (q< 0) est en mouvement dans une région où existe un champ magnétique $\vec{B}$ tel que :

$\vec{B}$ est uniforme ;

$\vec{B}$ *est* orthogonal à la vitesse initiale $\vec{v_0}$.

3-1- La trajectoire est plane

D'après le théorème du centre d'inertie : $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ soit $\vec{a} = \frac{q}{m}(\vec{v} \wedge \vec{B})$ où m est la masse de la particule.

En multipliant chaque membre de l'équation par $\vec{k}$, nous obtenons : $\vec{a}\,\vec{k} = \frac{q}{m}(\vec{v} \wedge \vec{B})\vec{k} = 0$ car $\vec{k}$ est colinéaire à $\vec{B}$.

On en déduit que le mouvement de la particule a lieu dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal à $\vec{B}$

La trajectoire de la particule est plane

3-2- La trajectoire est circulaire

La force qui s'exerce sur la particule peut s'exprimer par : $\vec{F}$= m$\vec{a}$. Par projection dans le repère de Frenet

$\begin{pmatrix} 0 \\ qvB \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{v^2}{R} \end{pmatrix}$ R étant le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré. On en déduit $\frac{dv}{dt} = 0$

par conséquent $v = v_0 = cste$: le mouvement est uniforme.

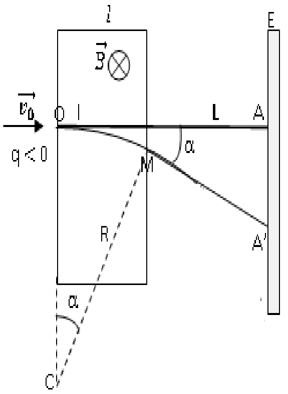
Le mouvement étant uniforme, nous obtenons $\frac{{v_0}^2}{R}$=$\frac{|q|}{m}$ v_0B, soit $R = \frac{mv_0}{|q|B}$: Le rayon de courbure est constant, la trajectoire est circulaire

Retenons :

- Une particule de charge q et de masse m pénétrant dans un champ magnétique uniforme d'intensité B avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ orthogonale au champ prend un mouvement circulaire uniforme.
- La trajectoire est dans un plan orthogonal au champ et son rayon vaut : R= m $\frac{v_0}{|q|B}$

4- Applications

4-1- Déflexion magnétique d'une particule chargée



Dans le champ magnétique la particule décrit un arc de cercle de rayon R=$\frac{mv_0}{|q|B}$. Elle arrive en A' sur l'écran E, perpendiculaire à OA et situé à la distance L du point O.

Evaluons D_m =AA' appelé déflexion magnétique.

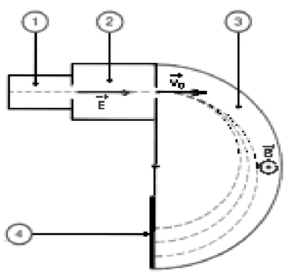
La déviation angulaire α est donnée par la relation

$\sin\alpha = \frac{l}{R}$

ou $\tan\alpha$=$\frac{AA'}{IA}$=$\frac{D_m}{L-OI}$ or OI≪L. Ainsi $\tan\alpha$=$\sin\alpha$ et $\frac{l}{R}$=$\frac{D_m}{L}$

alors D_m=$\frac{Ll}{R}$ ou $D_m = \frac{|q|}{mv_0}$BlL

4-2- Le spectrographe de masse : séparation des isotopes d'un élément



Il comporte trois parties dans un appareil où règne un vide poussé :

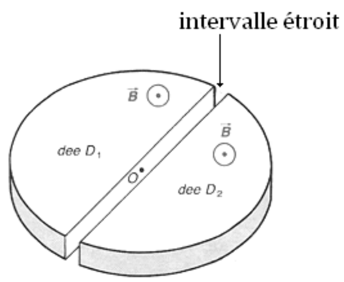
une chambre d'ionisation où l'on produit, avec une vitesse sensiblement nulle, des ions de masses différentes, mais de même charge ;

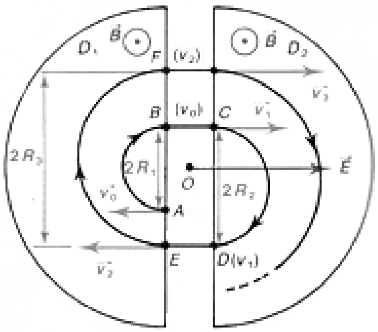
Une chambre d'accélération où les ions sont accélérés par un champ électrostatique ;

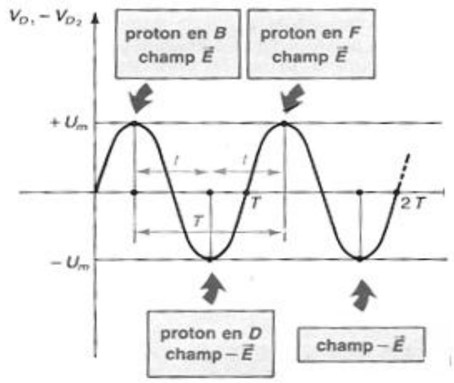
Une chambre de déviation où les ions, dans un champ magnétique uniforme, ont pour trajectoire un demi-cercle de rayon R qui dépend de la masse de la particule.

Un détecteur ou *collecteur* : Deux ions de masses différentes m_1 et m_2 viennent alors se rassembler dans les collecteurs C_1 et C_2. On montre que $\boldsymbol{C_1C_2 = |2R_2 - 2R_1|}$

4-3- Accélérateur de particules : le cyclotron







Les particules sont accélérées par un champ électrique $\vec{E}$ créé entre deux conducteurs en forme de D (Dee) par une d.d.p alternative U. A l'intérieur de chaque D, les particules sont soustraites à l'action du champ électrique et soumises à un champ magnétique uniforme qui leur fait effectuer un demi-tour. On montre que :

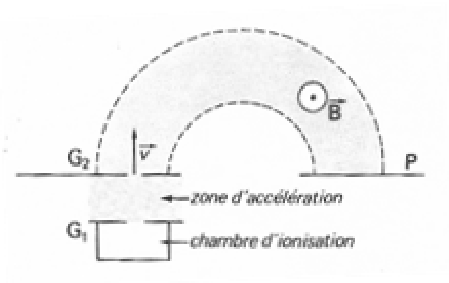
Période cyclotron (durée d'un tour) : $T = \frac{2\pi m}{|q|B}$

Variation de l'énergie cinétique à chaque tour est : $\Delta E_c = 2q.U_m$

Nombre de tours effectué jusqu'à la sortie :

$\boldsymbol{n = \frac{E_C(max)}{\Delta E_C}}$ avec $\boldsymbol{R_{max} = \frac{mv_{max}}{qB}}$

<u>Exercice résolu</u>



Un mélange d'ions isotopes du lithium $\boldsymbol{{}^6_3Li^+}$ et $\boldsymbol{{}^7_3Li^+}$ sort d'une chambre d'ionisation avec une vitesse initiale pratiquement nulle par rapport au repère du laboratoire.

Ils sont accélérés sous une tension $U = V_{G_1} - V_{G_2} = 1000$ volts et pénètrent ensuite dans une cavité hémicylindrique où règne un champ magnétique uniforme d'intensité B = 0,12 T. Le vecteur $\vec{\boldsymbol{B}}$ est orthogonal au vecteur vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ des ions dans cette cavité.

Quelle est la distance des deux taches obtenues sur un détecteur placé dans le plan P contenant la grille G_2 ?

La masse d'un proton est sensiblement égale à celle d'un neutron : $m_p \simeq m_n \simeq 1{,}67.10^{-27}$kg.

<u>Solution</u>

Les diamètres respectifs D_1 et D_2 des trajectoires suivies par les ions $\boldsymbol{{}^6_3Li^+}$ et $\boldsymbol{{}^7_3Li^+}$ sont tels que

$$\boldsymbol{D_1 = 2.R_1 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2U}{q}}\sqrt{m_1}} \text{ et } \boldsymbol{D_2 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2U}{q}}\sqrt{m_2}}$$

D'où $\boldsymbol{D_2 - D_1 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2U}{q}}(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})}$

Le noyau de l'isotope ${}^{6}_{3}\boldsymbol{Li^+}$ renferme six nucléons de masse m_p, sa masse vaut $m_1 \simeq 6.m_p$

De la même manière, la masse de l'isotope ${}^{7}_{3}\boldsymbol{Li^+}$ vaut $m_2 \simeq 7.m_p$.

D'où :

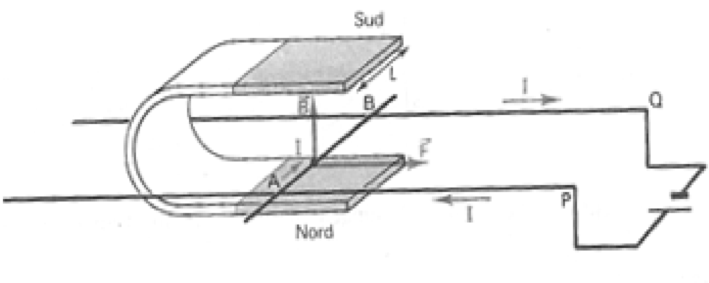
$$\boldsymbol{D_2 - D_1 = \frac{2}{0{,}12}\sqrt{\frac{2000}{1{,}6.10^{-19}}}(\sqrt{7 \times 1{,}6.10^{-19}} - \sqrt{6 \times 1{,}6.10^{-19}})}$$

Chapitre 3 : Loi de Laplace

1- Mise en évidence

1-1- Expérience des rails des Rails de Laplace

a- <u>Description</u>



Un conducteur rectiligne AB peut glisser, sans frottement, sur deux rails métalliques parallèles et horizontaux dans l'entrefer d'un aimant en U.

Un générateur de courant continu est branché en P et Q.

b- <u>Observation</u>

Lorsqu' un courant circule, le conducteur AB se met en mouvement.

Inversons le sens du courant : le déplacement se fait en sens inverse

Permutons les pôles de l'aimant : le déplacement change de sens

c- <u>Conclusion</u>

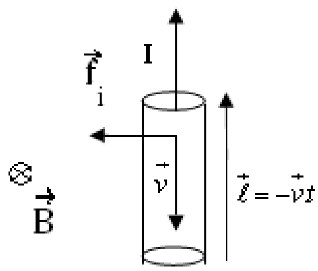
Un conducteur parcouru par un courant électrique, placé dans un champ magnétique uniforme, est soumis à une force $\vec{F}$de caractéristiques :

La direction est orthogonale au plan défini par $\vec{B}$ et la portion de conducteur ;

Le sens dépend du sens du courant et de celui de $\vec{B}$.

1-2- Démonstration de la Loi de LAPLACE

Dans un fil métallique, un courant électrique est dû à un déplacement d'électrons libres à vitesse $\vec{v}$ constante. Placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ chaque électron est soumis à la force de Lorentz : $\vec{f} = -e.\vec{v} \wedge \vec{B}$.
L'ensemble des N électrons contenus dans une portion de fil de longueur l tel que $\vec{l} = \vec{v}.t$ est soumise à une force : $\vec{F} = N.\vec{f} = -Ne.\vec{v} \wedge \vec{B}$



La quantité d'électricité qui parcourt le circuit pendant la durée « t » s'exprime par : $q = Ne = It$ on en déduit que $I = \frac{Ne}{t}$ Finalement, on a: $\vec{F} = I.\vec{l} \wedge \vec{B}$

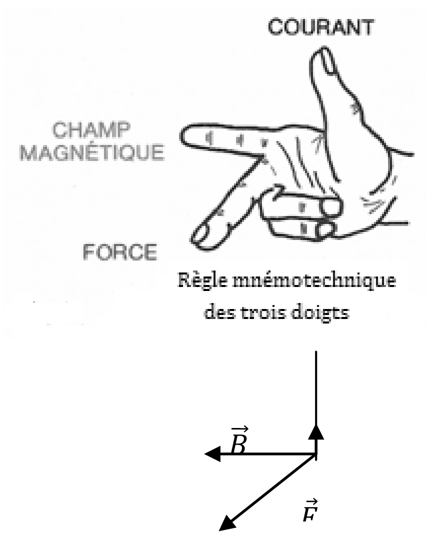
<u>Loi de Laplace</u>

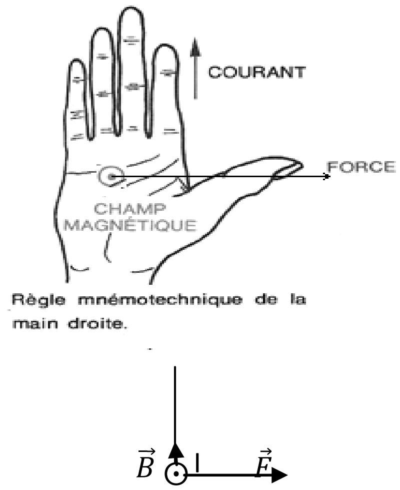
Un conducteur rectiligne de longueur ℓ parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, est soumis à une force électromagnétique $\vec{F}$appelée force de Laplace appliquée en son milieu et donnée par la relation :

$$\vec{F} = I.\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Le sens du vecteur $\vec{\ell}$ étant celui du courant

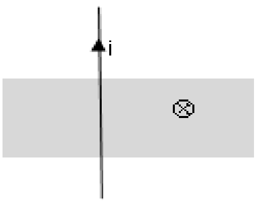
Pour trouver le sens de $\vec{\boldsymbol{F}}$, on peut utiliser l'une des règles suivantes :

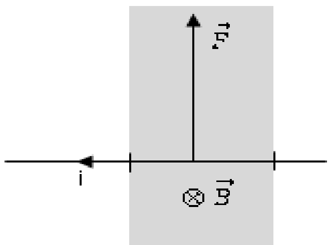


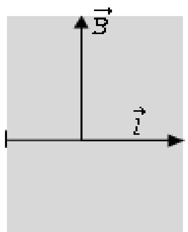


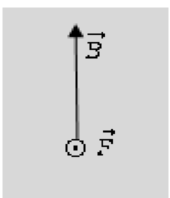
<u>**Applications :**</u>

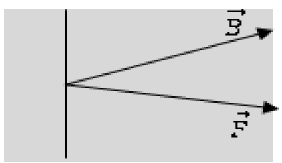
Sur les schémas suivants, placez les vecteurs $\vec{B}$, $I\,\vec{l}$ ou $\vec{F}$ manquant ou précisez le sens du courant et l'orientation de l, sachant que B et le conducteur sont orthogonaux.

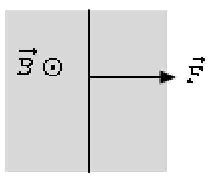




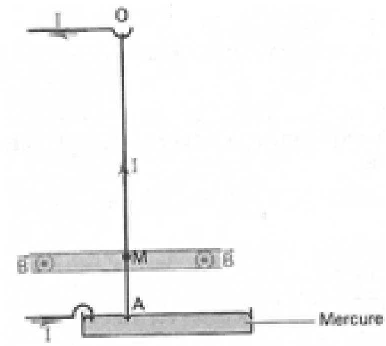








Exercice résolu



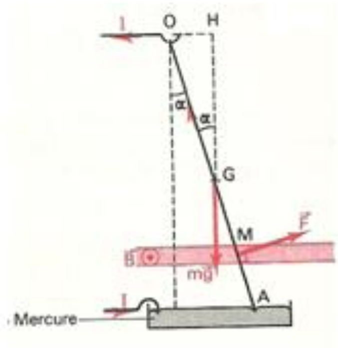
Le dispositif de la figure ci-contre est constitué d'un fil cylindrique OA, de longueur 1m, de masse m = 10 g, mobile autour de O. Il est parcouru par un courant I = 5 A. Un champ magnétique uniforme, d'intensité B= 0,1 T, perpendiculaire au plan de la figure, est appliqué au voisinage de M sur une largeur ℓ= 2cm ; OM = 0,9m.

Déterminer le sens et la valeur de l'angle d'inclinaison à l'équilibre.

(g = 10 m.s^{-2})

Solution

Inventaire des forces appliquées sur le fil :



Les forces appliquées sur le fil sont:

Le poids $\vec{P}$ appliqué au centre d'inertie G ;

La force de Laplace $\vec{F}$ appliquée au centre de la partie de conducteur soumise à l'action de $\vec{B}$.

La condition d'équilibre du fil s'écrit :

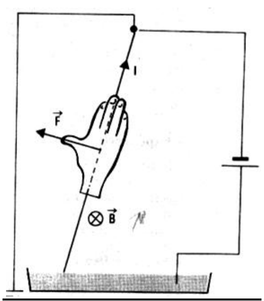
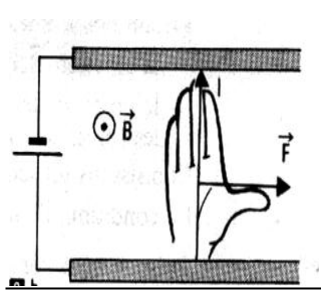
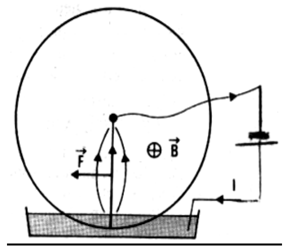
$$\mathcal{M}(\vec{F}) \quad + \quad \mathcal{M}(\vec{P})=0 \iff \boldsymbol{F.OM - mg.OH = 0}$$

$$\boldsymbol{Soit \quad I.\ell.B.OM - mg.OG.sin\alpha = 0}$$

Finalement, on a : $\boldsymbol{sin\alpha} = \frac{\boldsymbol{B.I.\ell.OM}}{\boldsymbol{mg.OG}}$

Application numérique : $\boldsymbol{sin\alpha} = \frac{0,1\times5\times2.10^{-2}\times0,9}{10^{-2}\times10\times0,5} = \boldsymbol{0,18 \Rightarrow \alpha = 10,4°}$

Détermination du sens de la force de Laplace par la règle de la main droite

Conducteur pendule	Rails de Laplace	Roue de Barlow
		

Chapitre 4 : Induction électromagnétique

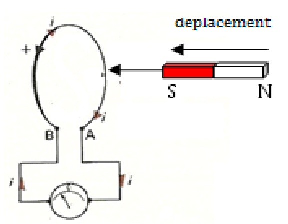
1- Mise en évidence

1-1- Expérience

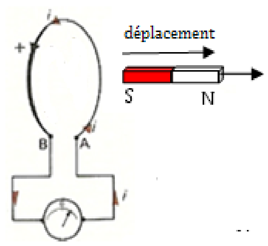
Une bobine plate comportant un grand nombre de spires est reliée à un galvanomètre à zéro central.

Lorsqu'on approche rapidement le pôle Sud de l'aimant de l'une des faces de la bobine ; le galvanomètre détecte le passage d'un bref courant dans uns sens ($\boldsymbol{i} < 0$). Et celui-ci s'annule dès que le mouvement de l'aimant cesse.

Lorsqu'on éloigne vivement le pôle Sud de l'aimant, le galvanomètre indique le passage d'un courant dans l'autre sens ($\boldsymbol{i} > 0$). Il n'indique plus rien ($\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$) lorsque l'aimant s'immobilise.



$\boldsymbol{i} < 0$:si le courant circule dans le sens négatif choisi



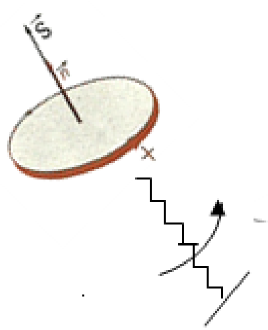
$\boldsymbol{i} > 0$:si le courant circule dans le sens positif choisi.

1-2- Conclusion

Cette expérience montre que l'on peut produire du courant électrique dans un circuit qui ne comporte pas de générateur. Ce courant porte le nom de courant induit ; Le phénomène physique qui l'engendre s'appelle l'Induction électromagnétique (on dit souvent induction tout court). Le circuit dans lequel il apparaît (la bobine) constitue l'*induit* et l'aimant qui permet de le créer est l'*inducteur*

2- Flux d'induction

2-1- Vecteur surface



On choisit sur le contour plan de la surface d'un circuit un sens positif Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à cette surface dont la direction est perpendiculaire à cette surface. Le vecteur surface est défini par :

$$\vec{S} = S \cdot \vec{n}$$

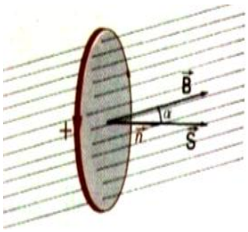
Sons sens est donné soit :

par la règle de la main droite : la main empoigne le contour dans le sens positif, le pouce écarté des autres indique le sens de $\vec{n}$; par la règle du tire bouchon de Maxwell : le tire bouchon, placé le long de la normale à la surface, tourne dans le sens positif choisi ; le sens de son déplacement donne le sens de ce vecteur.

2-2- Le flux magnétique Φ

a- Cas d'un circuit plan et d'un champ uniforme

Le flux du champ $\vec{B}$ à travers un circuit plan défini par le vecteur surface $\vec{S}$ est par définition si $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface:



$$\Phi = S\vec{B}.\vec{n} = \Phi = \vec{B}.\vec{S} = B.S\cos\alpha \text{ avec } \alpha = (\widehat{\vec{B},\vec{n}})$$

Le flux s'exprime en webers (Wb)

B en teslas(T) ;

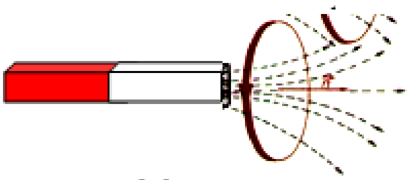
S en mètres carrés (m^2)

b- Cas d'un circuit formé de N spires planes identiques bobinées dans le même sens

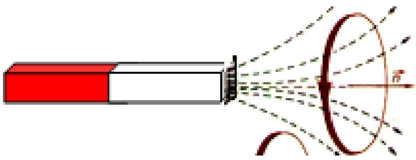
Le flux est une grandeur additive. Le flux à travers la bobine est :

$$\Phi = N.\vec{B}.\vec{S}$$

Signification physique et propriétés



(1)



(2)

En position (1) le flux magnétique est $\Phi_1 > 0$. En position (2), le flux est $\Phi_2 < \Phi_1$ car il y a moins de lignes de champ traversant le circuit.

Φ mesure le nombre de lignes de champ traversant le circuit

Le flux est une grandeur algébrique. Signe	$\Phi > 0 \ si\ (0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$	$\Phi = 0 \ si\ (\alpha = \frac{\pi}{2})$	$\Phi < 0 \ si\ (\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi)$
signification	Les lignes de champ traversent le circuit dans le sens de $\vec{n}$	Les lignes de champ sont parallèles au circuit ; elles ne le traversent pas.	Les lignes de champ traversent le circuit dans le sens opposé de $\vec{n}$.

3- Force électromotrice induite

3-1- Définition

Toute variation du flux magnétique Φ à travers un circuit y fait apparaître une force électromotrice induite.

3-2- Loi de Faraday

La force électromotrice induite instantanée e a pour expression :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

3-3- Circuit induit

Si le circuit, siège de la variation de flux, est fermé, il est parcouru par un courant induit.

<u>**Remarque**</u> **:**

Interprétation du phénomène d'induction électromagnétique dans un cas particulier : Champ électromoteur d'induction.

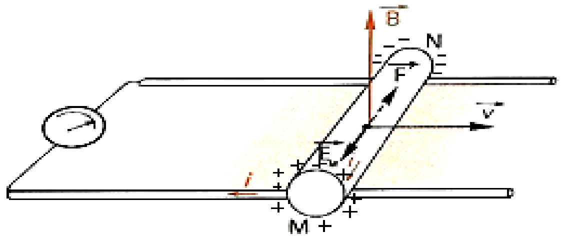
Le champ à l'origine du mouvement des électrons peut s'écrire :

$\vec{F} = -e.\overrightarrow{E_m} = -e.\vec{v} \wedge \vec{B}$ **donc** $\overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{m}}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ (champ électromoteur)

On peut considérer MN comme un générateur en circuit ouvert : la d.d.p aux bornes d'un circuit ouvert est égale à sa f.é.m. :

$e_{MN} = \overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{MN} = v.B.l$

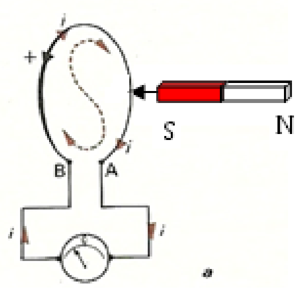
En circuit fermé, le sens du courant induit est le même que celui du champ électromoteur.

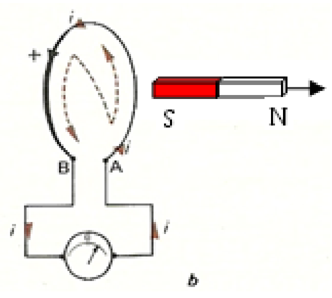


Loi de Lenz

Le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

<u>Exemple d'illustration</u>





Si on approche le pôle Sud de l'aimant :
$i_{AB}<0$
Le sens du courant induit est tel que la face de la bobine, du côté de l'approche de l'aimant est une face Sud qui repousse le pôle Sud de l'aimant : le courant induit s'oppose ainsi à la cause qui lui a donné naissance.
Un courant induit circule pendant toute la durée de l'approche de l'aimant, mais il y a alors répulsion entre le circuit induit et l'aimant

Si on éloigne le pôle Sud de l'aimant :
$i_{AB}<0$
Le sens du courant induit est tel que la face de la bobine, du côté du retrait de l'aimant, est une face Nord qui attire le pôle Sud de l'aimant.
Lors du retrait, le courant induit est créé dans uns sens tel qu'il attire l'aimant et s'oppose ainsi à la cause qui lui a donné naissance

4- Auto-induction

4-1- Définition

Un champ magnétique est crée par un circuit parcouru par un courant d'intensité $\boldsymbol{i}$. Ce champ engendre à travers le circuit lui-même un flux d'induction. Si ce flux varie, le circuit est le siège d'un phénomène d'induction propre appelé auto-induction.

4-2- Flux propre - Inductance propre

a- <u>Flux propre</u>

Le flux du champ magnétique crée par le circuit au travers de lui-même est appelé flux propre

b- <u>Inductance propre</u>

Le flux propre qui traverse le circuit est proportionnel au champ magnétique, qui lui-même proportionnel à l'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant. Le flux propre est donc proportionnel à l'intensité du courant

. $\boldsymbol{\Phi = L\, i}$, avec L est l'inductance du circuit

Cas d'un solénoïde : L= $\boldsymbol{4\pi.10^{-7}}\frac{N^2S}{l} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell}S$

L'unité d'inductance, dans SI, est le henry de symbole H

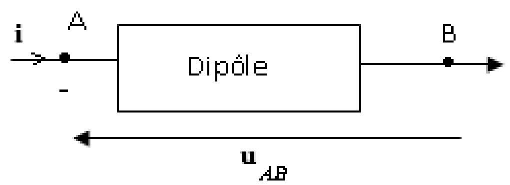
Avec N : nombre de spires; ℓ longueur du solénoïde ; S la surface d'une spire

4-3- Force électromotrice (f.é.m) d'auto-induction

Toute variation de l'intensité du courant dans un circuit y fait apparaître une f.é.m auto-induction :

$\boldsymbol{e = -L\frac{di}{dt}}$ dont les effets tendent à s'opposer aux variations initiales de l'intensité.

<u>Tension aux bornes d'une bobine</u>



La tension $\boldsymbol{u_{AB}}$ aux bornes du dipôle AB, orienté de A vers B, de résistance R, d'inductance L, parcouru par un courant d'intensité $\boldsymbol{i}$ variable a pour expression :

$\boldsymbol{u_{AB}}$= R$\boldsymbol{i}$+ L$\boldsymbol{\frac{di}{dt}}$

<u>Conséquences</u>

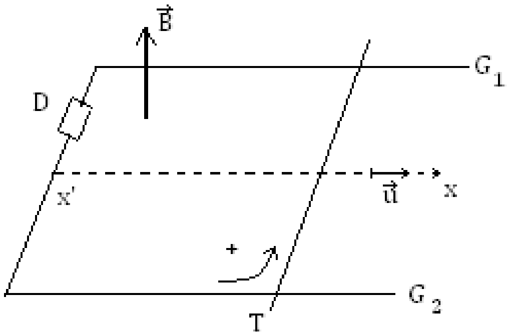
Intensité du courant induit	Quantité d'électricité induite	Energie électrique d'induction
$\boldsymbol{i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}}$ R : résistance du circuit induit e et i ont même sens	$\boldsymbol{dq = idt}$ donc $\boldsymbol{q = -\frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} d\Phi}$ $\boldsymbol{q = -\frac{1}{R}(\Phi_2 - \Phi_1) = -\frac{1}{R}\Delta\Phi}$	$\boldsymbol{dW = ei\,dt}$ $= \boldsymbol{-id\Phi}$ donc W = -i $\int_{\Phi_1}^{\Phi_2}\boldsymbol{d\Phi}$ $\boldsymbol{W = -i(\Phi_2 - \Phi_1) = -i\Delta\Phi}$

4-4- Energie magnétique emmagasinée dans une bobine d'inductance L parcourue par un courant d'intensité i

Cette énergie est donnée par la relation :

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 \begin{cases} W_m \text{ en joule (J) ;} \\ \text{L en henry (H) ;} \\ \text{i en ampère(A)} \end{cases}$$

<u>Exercice résolu</u> : Induction par variation de surface



Une tige T se déplace sans frottements sur deux glissières G_1 et G_2 horizontales, rectilignes, parallèles et distantes de $\boldsymbol{l = 12cm}$. La tige est perpendiculaire aux glissières.

La tige T, les glissières et un dipôle D constituent un circuit électrique orienté positivement dans le sens indiqué sur la figure et placé dans un champ magnétique uniforme vertical $\vec{B}$ (B=0,4T).

Dans tout le problème, la tige se déplace à la vitesse constante $\vec{V} = V.\vec{u}$ ($\vec{u}$ vecteur unitaire de la direction x'x).

a- Montrer que le flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par le circuit s'écrit : $\boldsymbol{\Phi = \Phi_0 + at}$, avec Φ_0: $\boldsymbol{flux}$ à $\boldsymbol{la\ date\ t = 0}$, et a : constante à déterminer en fonction des données ?

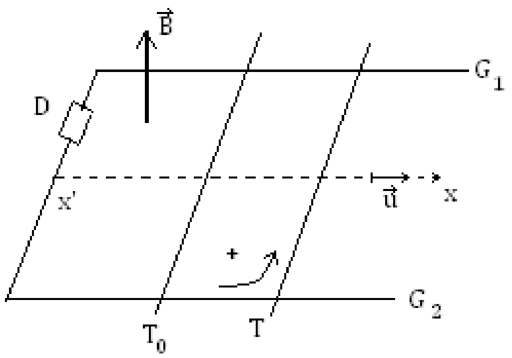
en déduire la force électromotrice e induite dans le circuit. Application numérique : V=2m.s^{-1} ; calculer e.

Le dipôle D est un résistor de résistance R=2Ω. Toutes les autres parties du circuit ont une résistance négligeable.

La tige étant toujours animée d'un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse de 2m.s^{-1}, déterminer le sens du courant induit et calculer son intensité I.

Quelle force $\vec{F}$ doit-on exercer sur la tige pour entretenir son mouvement ?

Solution



a- Expression du flux en fonction du temps

Le flux $\boldsymbol{\Phi}$ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface S du circuit est : $\boldsymbol{\Phi = \vec{B}.S\vec{n}}$

$\vec{n}$ étant le vecteur normal à la surface et dirigé vers le haut d'après le sens positif choisi.

$\vec{B}$ et $\vec{n}$ étant parallèles et de même sens, l'expression du flux est : $\boldsymbol{\Phi = B.S}$

Evaluons la surface S à l'instant t. Soit O l'origine des abscisses (voir figure).

A l'instant t=0, la barre est dans la position T_0. Soit x_0 l'abscisse de cette position. A l'instant t, la barre a parcouru une distance x=V.t, elle se trouve à la distance d=x_0+x de l'origine O. Si $\boldsymbol{l}$ est la longueur de la tige, la surface du circuit à l'instant t est : $\boldsymbol{S = l(x_0 + x) = l(x_0 + V.t)}$

Le flux $\mathbf{\Phi}$ est $\mathbf{\Phi} = \mathbf{B.S} = \mathbf{B.}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{V.t}) = \boldsymbol{B.l.x_0} + \boldsymbol{B.l.V.t}$

Il est de la forme $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi_0} + \boldsymbol{a}'$, avec $\mathbf{\Phi_0} = \boldsymbol{B.l.x_0}$ et $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B.l.V}$

Force électromotrice induite

La force électromotrice induite est donnée par la relation : $\boldsymbol{e} = -\frac{\boldsymbol{d\Phi}}{\boldsymbol{dt}}$

La valeur absolue de cette f.é.m est $\boldsymbol{E} = |\boldsymbol{e}| = \left|\frac{\boldsymbol{d\Phi}}{\boldsymbol{dt}}\right|$

Or $\frac{\boldsymbol{d\Phi}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{B.l.V}$ d'où $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B.l.V}$

Application numérique E=0,4x0,12x2=0,096V

E=0,1V et $\boldsymbol{e} = -\mathbf{0,1}\boldsymbol{V}$

Sens du courant induit et intensité $\boldsymbol{i}$

L'intensité $\boldsymbol{i}$ est donnée par la relation algébrique : $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{R}}$ avec $\boldsymbol{e} = -\mathbf{0,1}\boldsymbol{V}$

Le signe (-) indique que le sens du courant induit est opposé au sens positif choisi. Ce sens peut être déterminé par la loi de Lenz. Le courant induit s'oppose par ses effets à la cause qui lui a donné naissance. La cause du courant induit est l'augmentation de surface du circuit, le courant induit aura effet de créer sur le conducteur T une force qui tend à ramener T vers sa position initiale. D'après la règle du bonhomme d'Ampère, cette force $\overrightarrow{\boldsymbol{F'}}$ est dirigée vers l'origine O. Elle tend en effet à diminuer la surface du circuit. Son expression est $\overrightarrow{\boldsymbol{F'}} = \boldsymbol{I}.\vec{\boldsymbol{l}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}$. ($\vec{\boldsymbol{l}}$ est orienté dans le sens du courant induit et $\boldsymbol{I} = |\boldsymbol{i}|$)

Application numérique : $\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}} = \frac{\mathbf{0,1}}{\mathbf{2}}$ soit $\boldsymbol{I} = \mathbf{5.10^{-2}}\boldsymbol{A}$

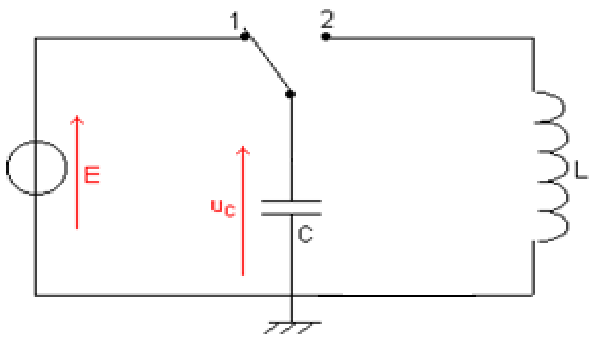
La force $\vec{\boldsymbol{F}}$ à exercer sur la tige pour entretenir le mouvement est opposée à celle due à la loi de Lenz. Elle est donc dirigée vers la droite et son expression est $\vec{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{I}.\vec{\boldsymbol{l}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}$.

Sa norme vaut ($\vec{\boldsymbol{l}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ étant perpendiculaire entre eux) : $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I.l.B}$.

Application numérique : F=5.10^{-2}x0,12x0,4 soit $\boldsymbol{F} = \mathbf{2,4.10^{-3}}$

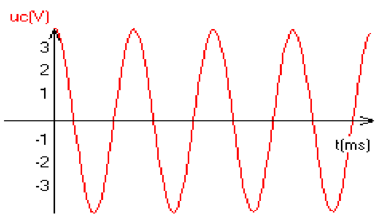
Chapitre 5 :
Oscillations électriques libres

1- Décharge d'un condensateur initialement chargé à travers une bobine non résistante d'inductance L.



On réalise le montage ci-contre:
Lorsque l'interrupteur est en position 1: Le condensateur se charge. A la fin de la charge : $U_C=E$; $i=0$; $Q=CU$
Lorsque l'interrupteur est en position 2: Le condensateur se décharge à travers la bobine

L'observation à l'oscilloscope permet d'obtenir la courbe $u_c=f(t)$ suivante:



La décharge du condensateur à travers la bobine donne des oscillations sinusoïdales.

2- Equation différentielle d'un circuit oscillant

Soit q la charge du condensateur à la date t ;

En appliquant la loi des mailles : $\mathbf{u_L + u_C = 0 \Leftrightarrow L\,\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0}$

On sait que : $\mathbf{i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}}$ **et** $\mathbf{\frac{di}{dq} = \ddot{q}}$

L'équation différentielle qui régit les oscillations est :

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC}\,q = 0}$$

3- Pulsation propre

On pose $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, ω s'appelle pulsation propre du circuit oscillant ; l'équation différentielle s'écrit :

Cette équation différentielle de la forme $\ddot{q} + \omega_0{}^2 q = 0$ admet comme solution une fonction sinusoïdale de temps :

$$q = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

On en déduit que les oscillations électriques sont sinusoïdales :

- de pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- de période propre $\boldsymbol{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \boldsymbol{2\pi\sqrt{LC}}$

- de fréquence propre $\boldsymbol{N_0} = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

<u>Remarque :</u>

$\boldsymbol{Q_m}$ *et* $\boldsymbol{\varphi}$ sont des constantes à déterminer d'après les conditions initiales (valeur et signe de q et de $\boldsymbol{i} = \frac{dq}{dt}$ à t =0).

4- Bilan énergétique

4-1- L'énergie emmagasinée par le circuit oscillant est constante

En multipliant les termes de l'équation différentielle par $\boldsymbol{i} = \frac{dq}{dt}$, on a :

$$Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}.\frac{dq}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = 0$$

En notant par $\mathbf{E}_{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{Li^2}$ l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine ;

$\boldsymbol{E_p} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ l'énergie potentielle électrique emmagasinée dans le condensateur ;

On peut écrire $\frac{d(E_m+E_p)}{dt} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{E_m + E_p = cste}.$

Conséquence : $\boldsymbol{\Delta E_m = -\Delta E_p}$ au cours des oscillations, il y a transformation mutuelle de l'énergie magnétique et de l'énergie potentielle électrique c'est-à-dire que tout accroissement de l'énergie électrique entraîne une diminution égale de son énergie magnétique, et réciproquement.

4-2- Valeur de l'énergie emmagasinée dans le circuit LC

On montre que :

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}CU_m^2$$

Q_m, I_m *et* U_m sont respectivement la charge, l'intensité et la tension maximales.

4-3- Décharge d'un condensateur à travers une bobine résistive : oscillations électrique amorties

En réalité, le circuit oscillant possède toujours une résistance (celle des fils de jonction exemple) et les oscillations s'amortissent.

a- <u>Equation différentielle du circuit :</u>

$$u_L + u_R + u_C = 0 \Leftrightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

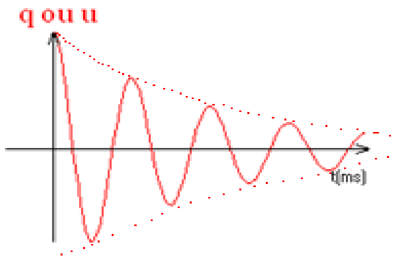
b- Etude énergétique

En multipliant par $\boldsymbol{i} = \frac{dq}{dt}$ les membres de l'équation différentielle, on a :

$$Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -Ri^2 \Leftrightarrow \frac{d(E_m + E_p)}{dt} = -Ri^2$$

La présence d'une résistance entraine une décroissance de l'énergie totale de l'oscillateur. L'énergie perdue est dissipée par effet joule (chaleur).

L'amplitude des oscillations décroît au cours du temps et finit par devenir négligeable : on observe des oscillations amorties.



Dans le cas où la valeur de R n'est pas trop grande les oscillations sont périodiques de période $T \simeq T_0$.

Exercice résolu

Un condensateur de capacité C= $100\ \mu F$ est initialement chargé sous une tension constante $U_0 = 100\ V$. puis associé à une bobine d'auto-inductance $L = 1\ H$ et de résistance nulle.

Etude de l'évolution de la charge. Donner :

Les valeurs de la charge initiale et de l'énergie fournie par l'opérateur ;

La période propre des oscillations électriques et leur fréquence propre N_0 ;

L'équation q= f(t) ;

L'équation de l'intensité *i* du courant en fonction du temps.

Etude de l'énergie. Evaluer les énergies emmagasinées dans le condensateur et dans la bobine. Que devient l'énergie initiale fournie au départ par l'operateur ?

Solution

Loi d'évolution q(t) et i(t).

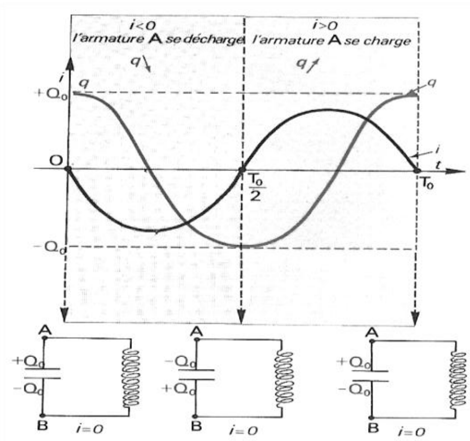
La charge initiale Q_0 est donnée par : $Q_0 = CU_0$.
Donc $Q_0 = 10^{-2}$ coulomb.

L'énergie initiale fournie est :

$$E_0 = \frac{1}{2}\frac{{Q_0}^2}{C} = \frac{1}{2}Q_0U_0 = 0,5\ J$$

Puisqu'il n'y a pas d'amortissement, la décharge est oscillante harmonique de période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 6,28.10^{-2}\ s$$



La fréquence propre vaut :

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = 15,9 \; hertz$$

L'équation générale de la charge est :

$$q = Q_M \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Q_M *et* φ sont donnés par les conditions initiales d'excitation.

A $t = 0$: $\begin{cases} q = Q_0 \\ i = \frac{dq}{dt} = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} Q_0 = Q_M \cos\varphi \\ 0 = -Q_M\omega_0 \sin\varphi \end{cases}$

La solution du système donnant une amplitude Q_M positive est : $Q_M = Q_0 , \varphi = 0, soit$:

$$q = Q_0 \cos \omega_0 t = 10^{-2} \cos 100t$$

L'intensité i s'obtient par : $i = \frac{dq}{dt}$

$$i = -Q_0\omega_0 \sin \omega_0 t = -\sin 100t$$

i varie entre -1 et 1 ampère.
Lorsque i est nul, q passe par un extrémum et inversement.

Les fonctions i et q sont dites en quadrature de phase.

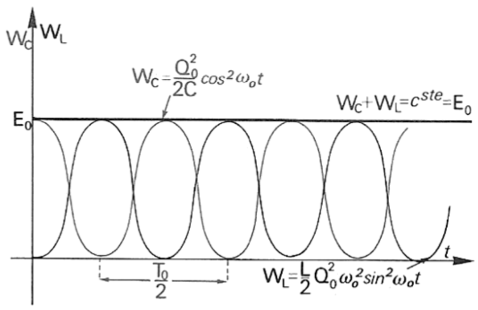
Etude de l'énergie

L'énergie emmagasinée à chaque instant dans le condensateur est :

$$W_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2C}{Q_0}^2 cos^2\omega_0 t$$

L'énergie dans la bobine est :

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L{Q_0}^2{\omega_0}^2 \sin^2 \omega_0 t$$



L'énergie totale dans le circuit à chaque instant vaut :

$$E = W_C + W_L = \frac{1}{2C}{Q_0}^2 cos^2\omega_0 t + \frac{1}{2}L{Q_0}^2{\omega_0}^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Or, ${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$ soit : $E = \frac{1}{2}\frac{{Q_0}^2}{C}(cos^2\omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t)$ on sait que $cos^2\omega_0$t+$sin^2\omega_0$t= 1

Alors l'énergie totale du circuit s'écrit $\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{{Q_0}^2}{C} = E_0}$

Chapitre 6 :
Oscillations électriques forcées

1- Courant alternatif sinusoïdal

1-1- Définition

Un courant alternatif sinusoïdal est un courant dont l'intensité est une fonction sinusoïdal du temps, c'est-à-dire de la forme : $i = \boldsymbol{I_m}\sin(\omega t+\varphi_1)$.

La tension instantanée entre deux points d'un circuit est de la forme : U= $\boldsymbol{U_m}\sin(\omega t+\varphi_2)$

1-2- Intensité et tension à l'instant t

On prend l'intensité du courant comme référence des phases

$$i = I_m \sin \omega t \;\; et \; u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Avec φ la phase de la tension par rapport l'intensité

<u>**Remarques :**</u>

« i » et « u » ont même pulsation

Si la phase de « u » est prise comme origine des phases alors « i » présente un déphasage $\boldsymbol{\varphi'} = -\boldsymbol{\varphi}$ par rapport à « u »

Signe de φ	Etat vibratoire	Signification physique
$\boldsymbol{\varphi} > 0$	« u » en avance de phase sur « i »	u s'annule ou atteint sa valeur maximale avant i
$\boldsymbol{\varphi} < 0$	« u » en retard de phase sur « i »	u s'annule ou atteint sa valeur maximale après i
$\boldsymbol{\varphi = 0}$	« u » et « i » sont en phase	« u » et « i » atteignent simultanément leurs valeurs maximales, minimales ou nulles

La pulsation ω, la fréquence N et la période T sont liées par la relation :

$\boldsymbol{\omega = 2\pi N = \frac{2\pi}{T}}$.

1-3- Intensité efficace – Tension efficace.

L'intensité efficace I d'un courant alternatif est égale à l'intensité I d'un courant continu qui, passant dans le même conducteur, y produirait durant chaque période le même dégagement de chaleur par effet joule que le courant alternatif considéré :

$\boldsymbol{dW = Ri^2dt}$ donc $\boldsymbol{W = R\int_0^T i^2dt = RI_m^2\int_0^T sin^2\,\omega t.dt = RI_m^2\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt}$

$\boldsymbol{W = \frac{RI_m^2}{2}\left([t]_0^T - \left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^T\right) = \frac{RI_m^2 T}{2} = RI^2T \;\Rightarrow I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$

On en déduit que la tension efficace U peut s'écrire : $\boldsymbol{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$

Applications au courant alternatif des lois du courant continu

L'intensité est à chaque instant la même en tout point d'un circuit : $\boldsymbol{i} = \frac{dq}{dt}$

La loi d'additivité des tensions est applicable aux valeurs instantanées des tensions.

La différence de potentielle (d.d.p) aux bornes d'un résistor est : $\boldsymbol{u = Ri}$

La d.d.p aux bornes d'un condensateur s'obtient par le calcul suivant :

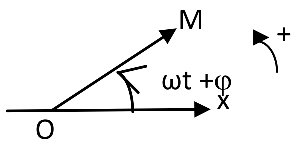
$$\boldsymbol{i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int idt = Cu \implies u = \frac{1}{C}\int idt.}$$

La d.d.p aux bornes d'une bobine de résistance r : $\boldsymbol{u = ri - e \Rightarrow u = ri + L\frac{di}{dt}}$

2- Vecteur de Fresnel

2-1- Définition

A une fonction sinusoïdale $\boldsymbol{y = a \sin(\omega t + \varphi)}$, on peut associer un vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ appelé vecteur de Fresnel tel que les caractéristiques sont :



$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ tourne autour de O à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$
Module : OM = a.
Sa direction à l'instant t est déterminée par l'angle
$\boldsymbol{(\overrightarrow{OM}, Ox) = \omega t + \varphi}$,
La phase est mesurée à partir de l'axe 0x (origine des phases).

Remarque : $\boldsymbol{y = a \sin(\omega t + \varphi)}$ est la projection du vecteur de Fresnel sur l'axe 0y

2-2- Somme de fonction sinusoïdal de même pulsation

La somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω est une fonction sinusoïdale de même pulsation ω. Le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ associé à la fonction résultante est égal à la somme des vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{\boldsymbol{OM_1}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{OM_2}}$ associés à chacune des deux fonctions composantes.

Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{OM_1}}$ le vecteur de Fresnel associé à la fonction $\boldsymbol{t \mapsto y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)}$
$\overrightarrow{\boldsymbol{OM_2}}$ le vecteur de Fresnel associé à la fonction
$\boldsymbol{t \mapsto y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)}$

$$\boldsymbol{or\ a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OM_2}}$ est le vecteur de Fresnel associé à $\boldsymbol{A \sin(\omega t + \varphi)}$.
A et $\boldsymbol{\varphi}$ sont déterminés à partir du diagramme de Fresnel.

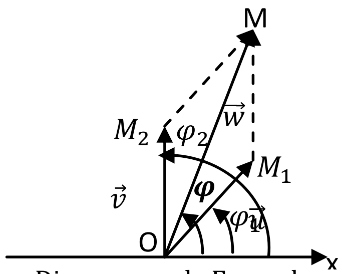


Diagramme de Fresnel

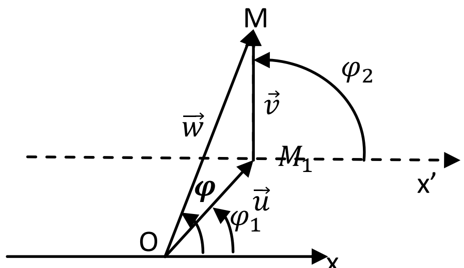


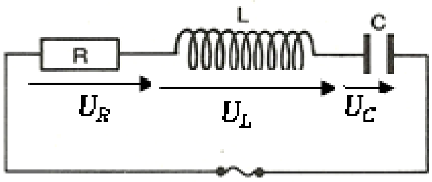
Diagramme de Fresnel simplifié

Remarque : En pratique on trace le diagramme de Fresnel à la date t=0, car le parallélogramme tourne sans se déformer.

3- Circuit(R,L,C)

3-1- Montage et équation du circuit

Pour entretenir les oscillations électriques, on introduit dans le circuit un générateur qui compense l'énergie dissipée dans le résistor.



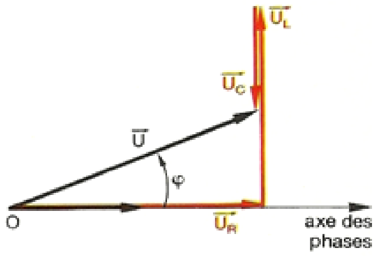
$$u_R + u_L + u_C = u \Leftrightarrow Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = u$$

u peut s'écrire : $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$

et $i = I_m \sin \omega t$

En dérivant par rapport au temps t, on obtient : $\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos \omega t = \omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

En intégrant : $\int idt = -\frac{I_m \cos \omega t}{\omega} = \frac{I_m}{\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

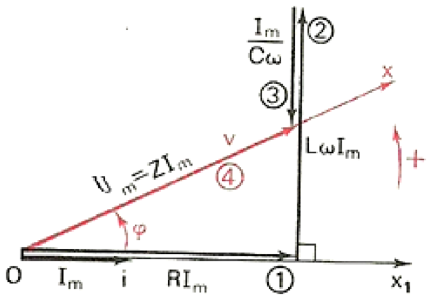


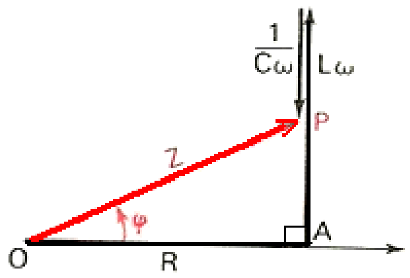
L'équation du circuit s'écrit :

$$RI_m \sin(\omega t) + L\omega I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \frac{I_m}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_m sin(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{U_R} + \vec{U_L} + \vec{U_C} = \vec{U}$$

3-2- Relation entre tension et intensité : Impédance.





$U_m^2 = (RI_m)^2 + \left(L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}\right)^2$ (Théorème de Pythagore)

$$U_m = I_m\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

On appelle impédance du circuit la quantité : $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

La relation entre la tension et l'intensité s'écrit $U_m = Z.I_m$ ou $U = Z.I$

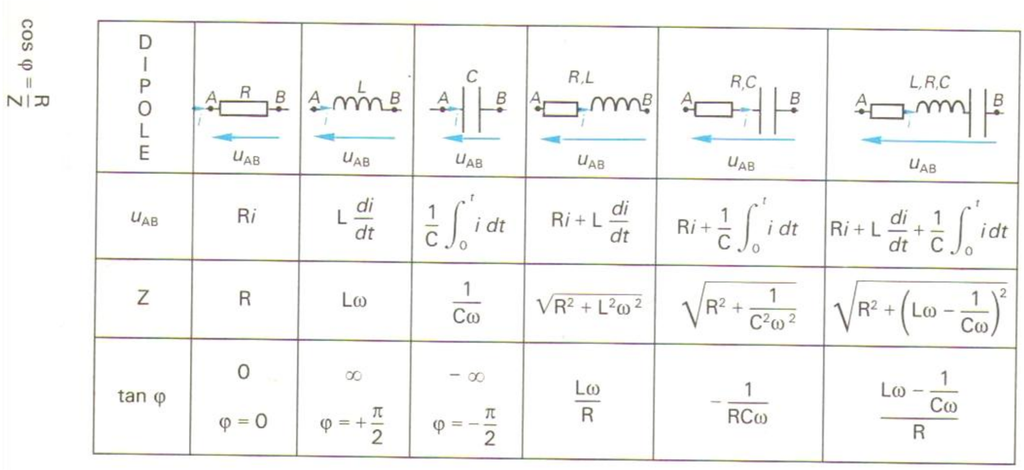
U en volts (V) ; Z en ohms (Ω) ; I en ampères (A)

Déphasage

En considérant le triangle rectangle (O,A,P) du diagramme de Fresnel, on déduit que:

$\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$	$\sin\varphi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{Z}$	$\tan\varphi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$

Impédance et déphasage de quelques dipôles



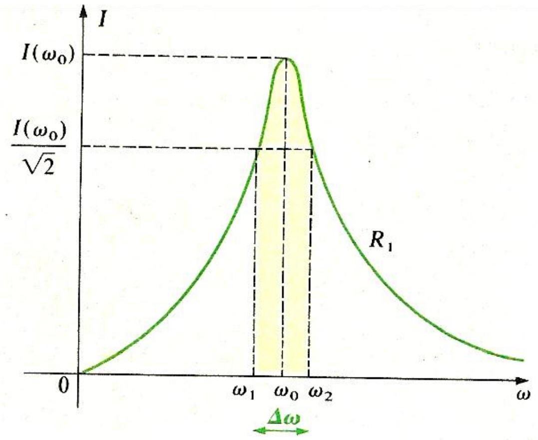
DIPOLE	R	L	C	R,L	R,C	L,R,C
u_{AB}	Ri	$L\dfrac{di}{dt}$	$\dfrac{1}{C}\int_0^t i\,dt$	$Ri + L\dfrac{di}{dt}$	$Ri + \dfrac{1}{C}\int_0^t i\,dt$	$Ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\int_0^t i\,dt$
Z	R	$L\omega$	$\dfrac{1}{C\omega}$	$\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$	$\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}$	$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$
$\tan\varphi$	0 $\varphi = 0$	∞ $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$	$-\infty$ $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{L\omega}{R}$	$-\dfrac{1}{RC\omega}$	$\dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$

3-3- Variation de Z et de I (I efficace)en fonction de ω : résonance.

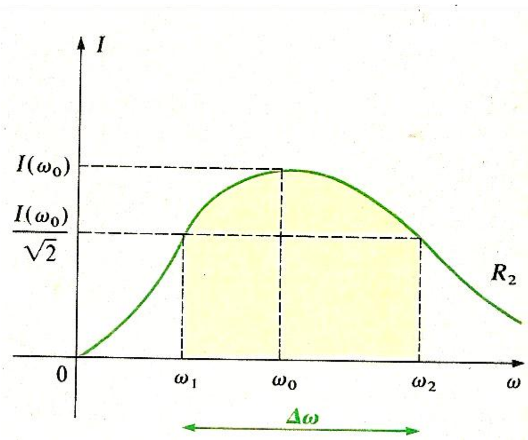
a- Tableau de variation

ω	0	ω_0	∞
Z	∞	$Z_{min} = R$	∞
I	0	$I_{max} = U/R$	0
φ	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$

b- <u>Courbe de variation de l'intensité efficace I en fonction de la pulsation</u> ω



Résonance aigue (correspond à R petit)



Résonance floue (correspond à R grand)

Si la résistance R est petit le circuit est plus sélectif. La bande passante est étroite.

c- <u>Conditions de la résonance</u>

- u et i sont en phase : $\varphi = 0$
- la pulsation ω du générateur est égale à la pulsation propre de l'oscillateur : $LC\omega^2 = 1$ ou $\omega = \omega_0$ *ou* $\frac{1}{C.\omega_0} = L\omega_0$
- L'impédance est minimum : Z = R
- L'intensité efficace est maximum : $I_0 = \frac{U}{R}$

3-4- Bande passante - Facteur de qualité.

a- <u>Définition</u>

La bande passante est le domaine de fréquence ou de pulsation où l'intensité efficace est tel que :

$$\boldsymbol{I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$$

b- <u>Largeur de la bande passante</u>

A la limite de la bande passante : $\boldsymbol{I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{U}{Z} = \frac{U}{R\sqrt{2}} \Rightarrow Z = R\sqrt{2}}$

Soit $\boldsymbol{Z^2 = 2R^2}$ ce qui équivaut à $\boldsymbol{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 2R^2}$

On en déduit que :

$$\boldsymbol{L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2} = R \implies LC\omega_2^2 - 1 = RC\omega_2 \quad (1)}$$

$$\boldsymbol{L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} = -R \implies LC\omega_1^2 - 1 = RC\omega_1 \quad (2)}$$

En retranchant membre à membre les équations (1) et (2), en tenant compte que $\boldsymbol{\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 - \omega_1).(\omega_2 - \omega_1)}$ et en simplifiant on a :

$$\boldsymbol{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}}$$

c- Le facteur de qualité Q

Le facteur de qualité caractérise le taux d'amortissement des oscillations.

Il est défini par :

$\boldsymbol{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{N_0}{\Delta N}}$ $\quad$ $\boldsymbol{car\ \ \omega_0 = 2\pi N_0}$ et $\boldsymbol{\Delta\omega = 2\pi\Delta N}$

Soit $\boldsymbol{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{C\omega_0 R}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Si Q est grand, la résonance est aigüe ; Si Q est petit, la résonance est floue.

d- Existence de surtension à la résonance.

Aux bornes d'une bobine : $\boldsymbol{U_L = L\omega_0 I_0 = \frac{L\omega_0}{R}U = QU}$

Aux bornes du condensateur : $\boldsymbol{U_C = \frac{1}{C\omega_0}I_0 = \frac{1}{C\omega_0 R}U = QU}$

Si R est faible, Q est grand, U_L et U_C peuvent être très grand. Le circuit est le siège de surtension qui peuvent être très dangereuses (étincelles dans les spires de la bobine, claquage du condensateur). Q est également appelé coefficient de surtension.

Remarque : $\boldsymbol{U \neq U_L + U_R + U_C}$

4- Puissance en régime sinusoïdal forcé.

4-1- Puissance instantanée

$\boldsymbol{p = u.i = 2UI\sin(\omega t + \varphi)\sin(\omega t) = UI[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]}$

4-2- Puissance moyenne

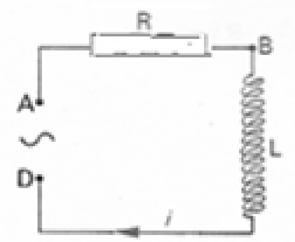
$\boldsymbol{P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T pdt\ d'o}$ù $\boldsymbol{P = UI\cos\varphi}$ $\quad$ **où** $\boldsymbol{\cos\varphi}$ est le facteur de puissance ;

UI est la puissante apparente, s'exprime en V .A (volt ampère)

$\boldsymbol{P = P_L + P_C + P_R}$, toute l'énergie consommée dans un circuit RLC est transformée en chaleur par effet Joule avec $\boldsymbol{P_L, P_R, P_C}$ sont respectivement des puissances consommées par la bobine, la résistance, et le condensateur.

<u>Exercice résolu 1</u>

On alimente un circuit formé d'une résistance pure ($\boldsymbol{R = 9,1\ \Omega}$) en série avec une bobine d'auto-inductance $\boldsymbol{L = 5.10^{-2}\ H}$ et de résistance nulle (fig. ci – contre) par la tension $\boldsymbol{u_{AD} = 14,1\cos(100\pi t)\ [volts]}$



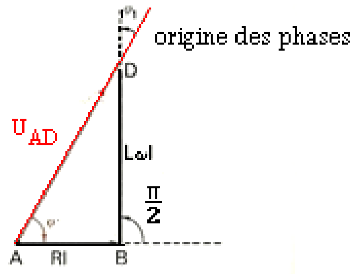
Donner $\boldsymbol{i(t)}$, $\boldsymbol{u_{AB}(t)}$ et $\boldsymbol{u_{BD}(t)}$

Solution

La tension est la référence des phases car

$$u_{AD} = 14,1\cos(100\pi t)$$

Traçons le diagramme de Fresnel (fig ci-contre)



$U_{AD} = 14,1\cos(100\pi t) \Longrightarrow$ à l'instant $t = 0$, le vecteur $\overrightarrow{U_{AD}}$ (10 V; 0 rad) est confondu avec l'axe origine des phases

on a : $\omega = 100\pi\ rad.s^{-1}\ d'o$ù N = 50Hz

$$U_{AD} = \frac{14,1}{\sqrt{2}} = 10\ V \quad (tension\ efficace)$$

Calcul de i(t)

Calcul de I :

$$U_{AD} = Z_{AD}I;\ \ Z_{AD} = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = 18,2\Omega$$

D'où : $I = \frac{U_{AD}}{Z_{AD}} = \frac{10}{18,2} = 0,55A$

Calcul de φ', déphasage du courant par rapport à la tension.

φ' est négatif (diagramme) ; le courant est en retard sur la tension u_{AD}.

$|\tan\varphi'| = \frac{LI\omega}{RI}$ d'où $|\tan\varphi'| = 1,72\ et\ \varphi' = -\frac{\pi}{3}$

On a donc :

$$\boxed{i(t) = 0,55\sqrt{2}\cos(100\pi t - \frac{\pi}{3})}$$

Calcul de $U_{AB}(t)$

$U_{AB} = Z_{AB}I$, or $Z_{AB} = R$, donc $U_{AB} = RI = 5V$.

Le déphasage de u par rapport à u_{AD} est égal à φ' (voir diagramme), donc :

$$\boxed{U_{AB}(t) = 5\sqrt{2}\cos(100\pi t - \frac{\pi}{3})}$$

Calcul de $U_{BD}(t)$

$U_{BD} = Z_{BD}I$, or $Z_{BD} = L\omega$, donc $U_{BD} = 8,64$ V.

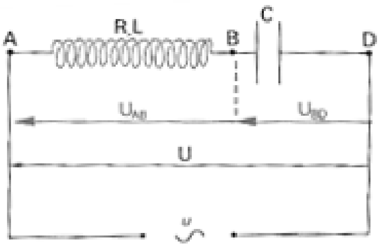
Le déphasage de u_{BD} par rapport à u est donné sur le diagramme par φ_1.

On voit que $\varphi_1 = +30^o, soit\ \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$

$$\boxed{U_{BD}(t) = 8,64\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

Exercice résolu 2

Une bobine résistive ($R = 10\ \Omega, L = 1H$) et un condensateur ($C = 100\mu F$) sont alimentés par une tension sinusoïdale $u(t) = 220\sqrt{2}\cos(\omega t)$

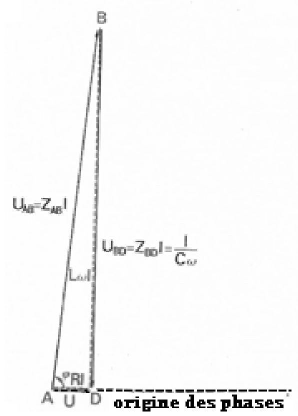


Calculer la pulsation à la résonance.

Donner les valeurs efficaces à la résonance et les équations horaires des tensions aux bornes de la bobine et de condensateur.
Comparer ces tensions à la tension d'alimentation. Conclure

Envisager ensuite le cas où $R = 1000\ \Omega$. Conclure

Solution



La résonance est obtenue pour $\omega = \omega_0$ ou $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$

Donc : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 100\ rad.s^{-1}$

Faisons le diagramme de Fresnel à la résonance (fig ci contre)

L'impédance du circuit RLC est $Z_{AD} = R\ car\ \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0\right)$.
L'intensité efficace du courant est

$$I = \frac{U_{AD}}{Z_{AD}} = \frac{U}{R} = 22\ A.$$

L'équation horaire $i(t) = 22\sqrt{2}\cos 100\,t$ est en phase avec u

L'impédance du condensateur est $Z_{BD} = \frac{1}{C\omega} = 100\ \Omega$.
La tension aux bornes du condensateur est

$$\boxed{u_{BD} = Z_{BD}I = 2\,200\sqrt{2}\cos\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

L'impédance de la bobine est

$Z_{AB} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = 100,5\ \Omega$.

La tension aux bornes de la bobine est : $U_{AB} = Z_{AB}I = 2211\ Volts$

En avance sur u de φ, tel que $\tan\varphi = \frac{L\omega}{R} = 10$. On a $\varphi = 84,3^o = 1,47\ rad$.

L'équation horaire est : $U_{AB}(t) = 2211\sqrt{2}\cos(100t + 1,47)$

Les tensions aux bornes des différents dipôles sont plus grandes qu'aux bornes du circuit.il y a surtension.

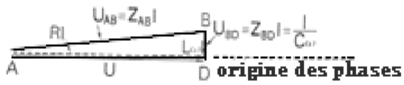


Diagramme de Fresnel à la résonance. L'intensité i du courant et la tension $u=u_{AD}$ sont en phase. Remarquer qu'en raison des déphasages: $U \neq U_{AB} + U_{BD}$: Il n'y a pas d'additivité des tensions efficaces.

Si $R = 1000\ \Omega$, l'intensité du courant est, à la résonance :

$I = \frac{U}{R} = 0,22\ A$. Le circuit est très amorti.

La tension aux bornes du condensateur est : $U_{BD} = Z_{BD}I = 22\ volts$

La tension aux bornes de la bobine est : $U_{AB} = Z_{AB}I = 22,11\ volts$

Ces deux tensions sont très inférieures à la tension d'alimentation. La résonance est floue. (fig.ci-dessus)

Dans un circuit peu amorti, lorsque la résonance est aiguë, la tension aux bornes des appareils constituant le circuit peut être très supérieure à la tension d'alimentation : c'est le phénomène de surtension.

EXERCICES

Exercice 1

Un courant d'intensité 20A parcourt un fil rectiligne de très grande longueur. Représenter $\vec{B}$ créé par ce courant rectiligne et déterminer sa norme à 0,5 cm puis à 5cm du fil.

Exercice 2

Un courant de 10A traverse un fil rectiligne, supposé infini, horizontal et dans le plan du méridien magnétique passant par l'axe vertical d'une petite aiguille aimanté horizontale. Le fil est à 50 cm au-dessus de l'aiguille. Donner la déviation de l'aiguille.

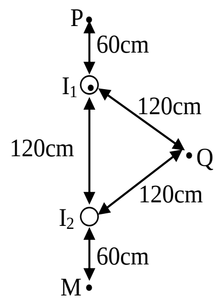
Valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre $B_h = 2.10^{-5}$ T

Exercice 3

1. Deux fils de longueurs infinies, rectilignes, parallèles et distants de 1m, sont traversés par des courants de même intensité et de même sens. L'intensité commune est égale à 100A. Dans le plan formé par les deux fils, déterminer la norme :
   a. du champ magnétique résultant à égale distance des deux fils ;

   b. du champ magnétique résultant à 25cm de l'un des fils. Préciser l'orientation de $\vec{B}$..

2. Reprendre a. et b. avec des courants de sens contraires.



Exercice 4

Deux fils rectilignes, de longueurs infinies, parallèles et horizontaux, sont distants de 120cm comme l'indique la figure. Le fil supérieur est parcouru par un courant d'intensité $I_1 = 6$A orienté vers l'avant de la figure.

a. Déterminer l'intensité et le sens du courant I_2 qui circule dans le second conducteur pour que le champ s'annule en M.

b. Dans ce cas, déterminer les caractéristiques du champ résultant en P et en Q.

Exercice 5

Une aiguille aimantée, mobile autour d'un pivot vertical passant par son centre d'inertie, est placée dans un champ uniforme horizontal $\overrightarrow{B_1}$. ($B_1 = 0,9$T). Elle tourne de 20° quand on crée un second champ magnétique horizontal $\overrightarrow{B_2}$ orthogonal à $\overrightarrow{B_1}$. CalculerB_2.

Exercice 6

Calculer la norme du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde de 30cm de longueur, portant 540spires, parcourus par un courant de 5 ampères.

Exercice 7

Un solénoïde long parcouru par un courant d'intensité 5mA est constitué par 5 couches de fil isolé à spires jointives. Le fil a un diamètre de 1mm, isolant compris. Son axe est perpendiculaire au méridien magnétique. En son centre se trouve une boussole.

De quel angle tourne l'aiguille lorsqu'on établit le courant, la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut 2.10^{-5}T ?

Déterminer la norme du vecteur champ magnétique résultant.

Exercice 8

Un solénoïde de longueur 40cm comporte 1000 spires. Son axe est perpendiculaire au méridien magnétique. Dans la région centrale, une petite aiguille aimantée, mobile autour d'un axe vertical, fait un angle d 30° avec l'axe du solénoïde quand il est parcouru par un courant.

Calculer l'intensité du courant sachant que $B_h = 2.10^{-5}$T.

Exercice 9

Une bobine plate est constituée par 20 spires de 10cm de rayon. On y fait passer un courant de 15 ampères. Calculer la valeur du champ magnétique au centre.

Exercice 10

Une bobine a 40 cm de longueur. On veut produire à l'intérieur un champ magnétique de valeur 0,02T avec un courant de 10 ampères.

a. Combien faudra- t – il de spires au total ?
b. Les spires sont jointives et ont 2,5 mm de diamètre isolant compris. Combien le solénoïde portera – t – il de couches ?

Exercice 11

Une bobine plate circulaire de rayon R = 10cm comprend 50 spires ; son plan est parallèle au méridien magnétique terrestre.

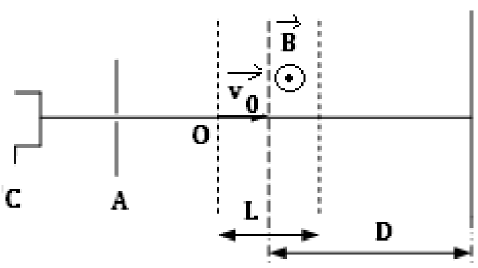
a. Donner les caractéristiques du champ magnétique $\overrightarrow{B_o}$ créé au centre de la bobine quand elle est parcourue par uncourant d'intensité I.
b. Déterminer I :

b.1- pour que la valeur du champ magnétique créé au centre de la bobine vaille 100 fois celle de la composante horizontale du champ magnétique terrestre (B_h =2.10^{-5}T) ;

b.2- pour qu'une petite aiguille aimantée, mobile autour d'un axe vertical et placée au centre de la bobine, tourne de 60° quand on lance le courant dans la bobine.

Exercice 12

Dans un tube cathodique, des électrons sont émis sans vitesse initiale par une cathode C puis accélérés par l'anode A; ils pénètrent en O avec une vitesse horizontale $\overrightarrow{Vo}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la figure et de largeur L.



1. Calculer la tension accélératrice u_{AC} = U entre l'anode et la cathode.
Données : $V_o = 10^7$m/s ; charge élémentaire : e = 1,6x10^{-19}C ; masse de l'électron : m = 9,1x10^{-31}Kg.

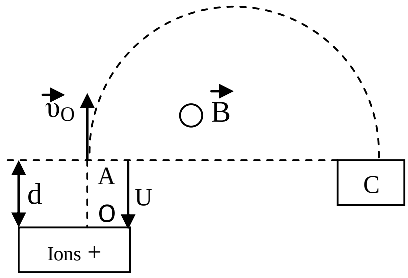
2. Étudier la nature du mouvement d'un électron dans le champ magnétique et calculer la grandeur caractéristique de la trajectoire, sachant que B = 10^{-3}T

3- Un écran placé à une distance D = 50cm de O reçoit un faisceau d'électrons. Calculer la déviation sur l'écran du faisceau d'électrons provoquée par le champ magnétique. (L =1cm est très inférieure à D).

4- Dans l'espace de longueur L =1cm, on fait agir simultanément le champ magnétique précédent et un champ électrique $\vec{E}$ afin que l'on n'observe plus la déviation sur l'écran (mouvement rectiligne). Calculer la valeur du champ électrique et représenter les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Exercice13

Dans un spectromètre, des ions positifs de masse m et de charge q sont accélérés sur une distance d par une tension U et acquièrent ainsi en O une vitesse $\overrightarrow{Vo}$. Ces ions pénètrent alors par une fente O dans un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonal à $\overrightarrow{Vo}$, dans lequel ils décrivent un demi – circonférence de rayon R. En faisant varier U, on peut donner à R une valeur telle que les ions soient recueillis dans un collecteur C.



1. Quel est le sens de $\vec{B}$ (d'avant en arrière ou d'arrière en avant sur la figure) qui perme ıux ions d'atteindre le collecteur ?

2. Établir l'expression de V_o en fonction de m, U et q.

3. Montrer que dans le champ magnétique uniforme $\vec{B}$, le mouvement des ions est circulaire uniforme. Établir l'expression de U en fonction de q, m, R et B.

4. On utilise des ions $^{39}K^+$ de masse $m_1 = 66{,}8.10^{-27}$Kg, de charge $q = 1{,}6.10^{-19}$C. Calculer la valeur de U pour que les ions arrivent dans le collecteur C

Données : OC= 20cm ; B = 0,5T

5. Les ions étudiés constituent maintenant un mélange d'isotopes $^{39}K^+$ et $^{41}K^+$ de même charge q, de masses respectives m_1 et m_2

($m_2 = 69{,}7.10^{-27}$Kg) et la tension reste égale à la valeur trouvée à la question 4.

5.1 Dans quel sens et de quelle distance faut – il déplacer le collecteur de sa position précédente pour détecter les ions $^{41}K^+$?

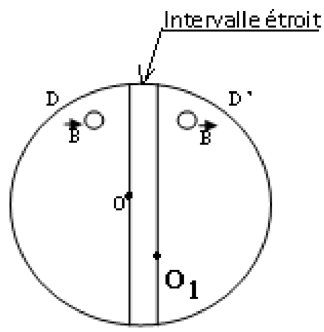
5.2 Dans sa première position, le collecteur est traversé par un courant de 10^{-9}A ; dans la seconde position par un courant de $5{,}5.10^{-11}$A. Calculer les pourcentages d'isotopes $^{39}K^+$ et $^{41}K^+$ dans le mélange.

Exercice 14

Un cyclotron est constitué par deux demi – boites cylindrique D et D'à l'intérieur desquels on établit un champ magnétique $\vec{B}$. Dans l'espace compris entre D et D', on établit une tension $u_{DD'}$ alternative de valeur maximale U.

1-Des ions positifs, de charge q et de masse m, sont injectés en O avec une vitesse nulle. La tension. $u_{DD'}$ est positive.

1.1 Préciser le sens de $\vec{B}$ pour que les ions positifs passent de O vers O_1 et établir l'expression littérale, en fonction de q, U et m, de l'énergie cinétique Ec_1 et de la vitesse V_1 des ions à leur première arrivée en D'.



A.N : calculer Ec_1 (en ev) ainsi que la vitesse V_1.

Données : $q = 3{,}2.\ 10^{-19}$C ; $m = 0{,}33.10^{-26}$Kg ; $U = 10^5$V

1.2 Ces ions pénètrent alors dans D'en A_1. Montrer que dans ce « dee » leur mouvement est circulaire uniforme. On admet que le poids de chaque ion est négligeable devant la force de Lorentz qu'il subit. Exprimer, en fonction de B, q, U et m, le rayon R_1 de leur trajectoire.

1.3 Calculer R_1 si B = 1T.

2. Les ions ressortent en D'au point A'_1. On inverse alors la tension $u_{DD'}$ en lui gardant la même valeur U. Établir les expressions littérales :

2.1 de leur vitesse V_2 à l'entée de D et leur énergie cinétique Ec_2 ;

2.2 du rayon R_2 de leur trajectoire dans D ;

2.3 du rayon de la trajectoire des ions en fonction de n, nombre de passages entre D et D', et de R_1.

3. La différence de potentiel $u_{DD'}$ étant alternative de fréquence N, ce qui permet d'accélérer les ions à chaque passage. Exprimer littéralement la durée τ d'un demi – tour. Vérifier qu'elle est indépendante de la vitesse. En déduire la fréquence N de la tension alternative et la calculer.

4. Le cyclotron a un rayon de 49,5cm. Calculer le nombre de tours décrits par ces ions et leur énergie cinétique à leur sortie (en eV).

<u>Exercice 15</u>

On observe la trajectoire circulaire d'un électron dans une enceinte de verre contenant un gaz sous faible pression. Le champ magnétique a pour valeur $B = 1{,}8.10^{-3}$T. On mesure le diamètre de la trajectoire 8cm. La tension accélératrice du canon à électron est U = 450V. En déduire une valeur du rapport $\frac{e}{m}$

<u>Exercice 16</u>

Dans un spectromètre de masse, on utilise la déviation magnétique d'ions dans un champ magnétique uniforme. Les ions sont accélérés par une tension U. Le rayon de la trajectoire vaut r = 5cm avec B = 1 T.

Quelle tension accélératrice est – elle nécessaire pour collecter les ions $^{129}Xe^+$ (ions xénon).

On veut séparer les ions $^{129}Xe^+$ et $^{131}Xe^+$ pour recueillir uniquement les ions $^{129}Xe^+$. Calculer le rayon de la trajectoire des ions $^{131}Xe^+$. Quelle conclusion peut – on en tirer ?

<u>Exercice 17</u>

Dans un spectromètre de masse, les ions de charge q sont accélérés par une tension U avec une vitesse initiale nulle. Il pénètre dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{V}$.

1. Déterminer le rapport q/m en fonction de U, B et R (rayon de courbure).

2. A.N : B = 0,1T, U = 4800V et $q = -1{,}6\ 10^{-19}$C.

3. Exprimer numériquement la relation entre la masse m, exprimée en u.m.a (unité de masse atomique), et R.

Donnée : $1u.m.a = 1{,}66.10^{-27}$Kg

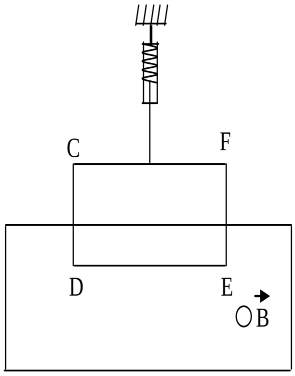
4. Les ions arrivent sur une plaque sensible après avoir décrit deux demi – cercles. Deux taches qui se forment à 118,3cm et

121,7cm de la fenêtre d'admission des ions. En déduire la masse des ions correspondants en u.m.a.

Ces ions sont des ions Cl^-. La masse atomique molaire d'atome de chlore étant 35,5g/mol, quelles sont les proportions isotopiques du chlore naturel ?

Exercice 18

On négligera le champ magnétique terrestre. Un cadre rectangulaire CDEF indéformable comportant N=100spires est suspendu à un dynamomètre. Ils se trouvent partiellement plongé dans un $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire au plan vertical du cadre.



On donne CF = DE = 15cm. On établit un courant d'intensité constante I = 0,5A dans le

sens de D vers E.

1. Montrer que, quels que soient le sens du courant et celui du champ magnétique, les

forces s'exerçant sur les brins verticaux du cadre n'ont aucune action sur son équilibre.

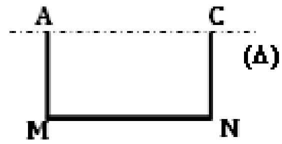
2. L'indication du dynamomètre augmente de 0,5N. Caractériser le vecteur $\vec{B}$.

3 Que se passe-t-il si le cadre est entièrement plongé dans le champ magnétique $\vec{B}$

et si on maintient le courant précédent ?

Exercice 19

Un conducteur indéformable AMNC est composé de trois parties rectilignes de même section formant trois côtés d'un rectangle. Il est mobile sans frottement autour d'un axe fixe (Δ) passant par A et C. On donne AM = CN = a = 6cm ; MN = 2a ; densité linéique $\lambda = 5.10^{-2}$ Kg/m ; B =0,20T ; g=10N/Kg.



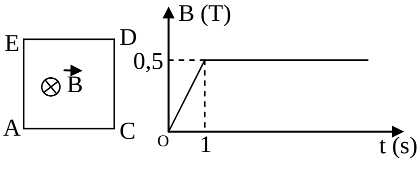
1. Quelle est la position dans l'espace du plan AMNC et préciser la position du centre d'inertie du conducteur.

2. Le cadre est parcouru par un courant I = 1A dans le sens A vers M. Étudier les forces de Laplace sur les trois côtés du cadre placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Indiquer, en justifiant la réponse, dans lequel des trois cas suivant le cadre quitte sa position d'équilibre initiale :

a) $\vec{B}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MN}$ et de même sens ; b) $\vec{B}$ ⊙ ; c) $\vec{B}$ vertical orienté de bas en haut.

3. Dans le cas où le cadre prend une nouvelle position d'équilibre écartée du plan vertical d'un angle α, caractériser toutes les forces appliquées au cadre et calculer α.

Exercice 20



La spire carrée ACDE est placée dans un champ magnétique uniforme B dont la valeur varie comme l'indique la figure ci – contre.

1-Indiquer le sens du courant induit i' apparu dans la spire carrée.

2-Exprimer la f.é.m. induite e et l'intensité algébrique i' du courant induit sachant que la résistance de la spire est R = 0,1Ω et la longueur d'un côté est a = 10cm.

Exercice 21

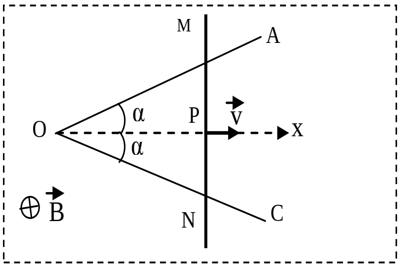
Deux rails en cuivre OA et OC, de longueur égale, soudée en O, sont placés horizontalement dans un champ magnétique B, uniforme constant et vertical.On déplace, avec une vitesse constante v, une tige métallique MN sur ces rails, de telle façon que MN reste toujours perpendiculaire à Ox. La tige part de O à l'instant initial t = o, son milieu restant sur Ox.

1-Calculer le flux magnétique Φ à travers ce circuit à l'instant t.

2-En déduire de la f.é.m. induite e ainsi que le sens du courant induit i'.

3-Soit k la résistance linéique des rails et de la tige. Calculer l'intensité du courant induit i'.

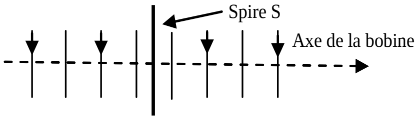
A. N: $OA = OC = l = 150cm$; $v = 2m/s$; $\alpha = 25°$; $B = 0,2T$; $k = 1\Omega/m$



Exercice 22

Une bobine de longueur $l = 24cm$ et de rayon $r = 1cm$ comprend $n = 2500$ spires par mètre ; elle est traversée par un courant d'intensité i_1.

1-Déterminer la direction, le sens et la valeur du champ magnétique B_1 dans la région centrale de la bobine.



2-L'axe de la bobine est perpendiculaire au plan de la spire S. Calculer le flux du champ magnétique B_1 à travers la spire S qui entoure la bobine précédente dans sa région centrale.

3-On annule i_1 dans la bobine durant τ. Déterminer le sens et la valeur moyenne i'_{moy} de l'intensité algébrique du courant induit dans S. On note r' la résistance de la spire S.

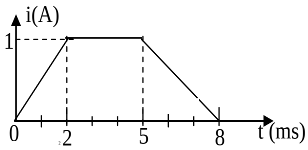
4-Si l'on prend $i_1 = 5\sin 100\pi t$, calculer la f.é.m. d'induction e qui prend naissance dans la spire S. En déduire l'expression du courant induit i' (préciser son amplitude et sa fréquence).

Exercice 23

Un solénoïde de longueur $l = 40cm$, comportant 1250spires par mètre, de rayon $R = 2cm$ est parcouru par un courant constant $I = 5A$.

1-Calculer la valeur du champ magnétique créé au centre O du solénoïde par le passage du courant.

2-Calculer le flux propre Φ à travers ce solénoïde. En déduire son inductance L.



3-Le solénoïde est maintenant parcouru par un courant d'intensité variable en fonction du temps comme l'indique la figure ci – contre. Déterminer la f.é.m. d'auto – induction e qui apparaît aux bornes de la bobine pour chacune des trois phases. Tracer le graphe $e = f(t)$ pour $t \in [0 ; 8ms]$.

Exercice 24

Une bobine plate (k spires de surface S) tourne autour de l'un ses diamètres. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme. L'axe de rotation est orthogonal à la direction du champ.

Donner l'expression de la f.é.m. induite lorsque la bobine tourne à la vitesse angulaire constante de N tours par seconde.

Exercice 25

Aux bornes d'un générateur de tension continue de 6V, on branche une bobine ($L = 11mH$; résistance négligeable) et un conducteur ohmique ($R = 1K\Omega$).

1. Calculer la valeur de l'intensité du courant en régime permanent.

2. Calculer la constante de temps τ caractéristique de l'établissement du courant dans le circuit.

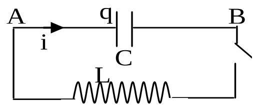
3. Calculer la valeur de $\frac{di}{dt}$, à l'instant t =0.

4. On remplace le générateur précédent par un G.B.F délivrant une tension en créneau, prenant soit la valeur 6V, soit la valeur 0V pendant des durées égales avec la fréquence N = 500 Hz. Représenter graphiquement la variation de l'intensité du courant dans le conducteur ohmique.

Exercice 26

1. Un condensateur de capacité C = 2,5 µF est chargé sous une tension constante U = 20 V. Calculer sa charge finale Q et l'énergie ε_e emmagasinée.

2. Les armatures de ce condensateur chargé sont reliées à une bobine d'inductance L = 25mH et de résistance négligeable. A un instant pris comme origine de temps, on ferme l'interrupteur. L'intensité du courant i (t) est comptée positivement quand le courant circule dans le sens indiqué sur le schéma. On appelle q(t) la charge de l'armature reliée au point A.



2.1 Établir l'équation différentielle du circuit oscillant

2.2 Établir les expressions q (t), i (t). A t = 0, la charge q est positive.
2.3.Donner les expressions ε_e (t) et ε_m (t) des énergies stockées dans le condensateur et la bobine.

Quelle relation y a – t –il entre εe (t), εm (t) et ε.

3-A l'instant to dont on ne calculera pas, la tension aux bornes du condensateur est 10 V. Calculer à cet instant l'intensité du courant.

Exercice 27

Une portion de circuit comprenant une lampe de résistance R = 300 Ω et un condensateur est branchée entre les bornes d'une prise de courant alternatif (U = 120V ; N = 50Hz). Calculer la capacité pour laquelle l'intensité efficace est 0,24A et donner l'expression de l'intensité instantanée en fonction du temps.

Exercice 28

Sur une prise de courant entre les bornes de laquelle le secteur maintient une tension alternative sinusoïdale de fréquence

N = 50Hz et de valeur efficace U = 115V, on branche une portion de circuit comprenant une bobine (R = 1 Ω et L = 1H) et un condensateur. On demande :

1. la capacité que doit avoir le condensateur pour qu'il y ait résonance ;
2. l'intensité efficace du courant à la résonance ;
3. les valeurs maximales des tensions qui existent alors entre les extrémités d'une part de la bobine, et d'autre part du condensateur ;
4. la différence de phase entre ces deux tensions.

Exercice 29

1. Entre deux points P et Q, on maintient une différence de potentiel sinusoïdale qui est exprimée en volts par l'équation u = 141,4sinωt

La pulsation ω est égale à 314 rad/s. Quelles sont la fréquence et la valeur efficace de cette tension ?

2. On relie P et Q par une résistance pure r et une bobine B, montées en série. L'intensité efficace du courant qui parcourt ce circuit est I_1 = 10A. La différence de potentiel efficace aux bornes de r est 20 volts. Quelle est la résistance r ?

3. La résistance de la bobine B est de 6ohms.

- A partir de la différence de potentiel efficace entre P et Q et de l'intensité efficace, calculer l'impédance du circuit PQ.
- A partir de l'impédance du circuit PQ, calculer la valeur de l'inductance de B.
- Quel est le facteur de puissance de B ?
- Quel est le facteur de puissance du circuit PQ ? Comment pourrait – on le rendre égal à 1 ?

Exercice 30

On monte en série un condensateur de capacité C = 40μF et une bobine de résistance R = 50 Ω et d'inductance L=0,1 H.

Aux bornes du circuit, on applique une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace U = 20Vconstante et de pulsation ω variable.

1/ 1.1 Établir l'expression de l'intensité efficace I en fonction de ω.

1.2 Pour quelle valeur ω_o de la pulsation, l'intensité efficace I est maximale ?

1.3 Quelles sont alors la tension efficace aux bornes du condensateur, la valeur de la puissance maximale dissipée dans le circuit et le déphasage de la tension par rapport à l'intensité i ?

2/ Pour quelles valeurs ω_1 et ω_2 de la pulsation, la puissance dissipée dans le circuit est – elle égale à la moitié de la puissance maximale ? En déduire les déphasages entre la tension u et le courant i.

3/ On désigne par Q la valeur efficace de la charge du condensateur, Q_m est la charge du condensateur pour la valeur maximale de I.

Exprimer Q en fonction de U, R, L, C et ω. Pour quelle valeur ω_3 de la pulsation, Q passe – t – il par un maximum ?

Exercice 31

Un dipôle comprend en série une bobine de résistance R, d'inductance L et un condensateur de capacité C. Il est alimenté par une tension alternative sinusoïdale de pulsation ω_o telle que LC $\omega_o^2 = 1$. A une date t quelconque, la charge du condensateur est $q = q_o \cos \omega_o t$.

1. Établir, en fonction de L, R, q_o, ω_o, t suivant le cas considéré, l'expression de la valeur instantanée :
   - de l'intensité i (t) du courant traversant le dipôle ;
   - de la tension u_c (t) = u_{MB} aux bornes du condensateur ;
   - de la tension u = u_{AB} aux bornes du dipôle (R, L, C)
2. Exprimer, en fonction de I, q_o, ω_o, t :
   - l'énergie ε_e stockée dans le condensateur ;
   - l'énergie ε_m stockée dans la bobine
   - l'énergie totale ε emmagasinée dans le dipôle (R, L, C)
3. On pose E_j l'énergie dissipée par effet joule dans le circuit pendant une période T_o.
   - Donner l'expression de E_j en fonction de R, q_o, ω_o
   - Montrer que E / E_j = Q / 2π, Q étant une constante que l'on exprimera en fonction de R, L, ω_o.

   Calculer Q.
   - Vérifier que Q n'est autre que le coefficient de surtension aux bornes du condensateur Q = u_c / u,

   avec u : tension efficace aux bornes de l'ensemble.

   A.N : R = 50 Ω ; L =0,5H ; C = 2μF.

Exercice 32

La portion de circuit AD comprend un conducteur ohmique de résistance R = 24 Ω et une bobine de résistance r et d'inductance L. Elle est parcourue par un courant sinusoïdal de fréquence N = 50Hz. Des voltmètres placés entre les bornes des différentes portions du circuit indiquent les valeurs efficaces suivantes : $U_{AD} = 25V$; $U_{AB} = 12V$; $U_{BD}=18V$

Déterminer r et L

Exercice 33

Les éléments suivants sont disposés en série, entre deux points A et B : un conducteur ohmique de résistance R = 40 Ω, une bobine de résistance r = 10 Ω et d'inductance L = 0,4H, un condensateur de capacité C = 10µF.

1. On établit entre A et B, une tension sinusoïdale $u = 60\sqrt{2}\ \sin 2\pi Nt$ avec N = 50Hz.
   Calculer l'intensité efficace I du courant qui s'établit dans le circuit.
   Déterminer l'expression de l'intensité instantanée i (t).
2. Montrer qu'il existe une autre fréquence N' différente de 50Hz pour laquelle l'intensité efficace dans le circuit est la même que précédemment. Calculer N' et exprimer l'intensité instantanée correspondante i'(t).

Exercice 34

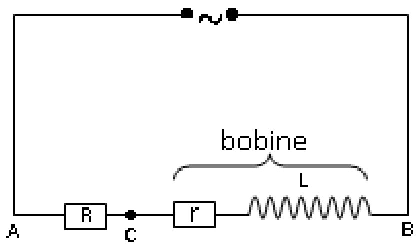
On établit une tension sinusoïdale entre les bornes A et D d'un circuit comprenant un condensateur en série avec une bobine AB, de résistance R et d'inductance L. L'intensité efficace du courant étant 0,2A. La mesure des tensions efficaces fournit les résultats suivants :

$$U_{AD} = 120V;\ U_{AB} = 160V;\ U_{BD} = 56V$$

1. Calculer les impédances de la bobine, du condensateur, du dipôle (R, L, C) et la résistance R de la bobine.
2. Calculer le déphasage de l'intensité instantanée i par rapport à la tension instantanée u.
3. Sachant qu'un courant de pulsation $\omega_o = 250$ rad /s traversant le même circuit serait exactement en phase avec la tension entre A et D, déterminer les valeurs de l'inductance L et de la capacité C.
Quelle est la valeur de la fréquence N du courant utilisé ?

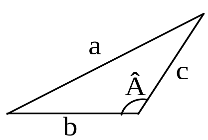
Exercice 35

On place en série, entre deux points A et B, une bobine d'inductance L et de résistance r, une résistance R = 50Ω. Une source de tension sinusoïdale $u_{AB} = 220\sqrt{2}\ .\sin(100\pi t)$ est maintenue entre A et B. On mesure, à l'aide de trois voltmètres, les valeurs efficaces des tensions U_{AB}, U_{AC}, U_{CB}. Les trois voltmètres indiquent respectivement : $U_{AB} = 220V$; $U_{AC} = 90V$; $U_{CB} = 160V$.



1. Calculer la fréquence et l'intensité efficace du courant débité par la source.
2. Construire le diagramme de Fresnel en tensions efficaces relatif à cette expérience.
3. Déterminer la phase de l'intensité instantanée i (t) par rapport à la tension. En déduire l'expression de i (t).
4. Calculer r et L.
5. Déterminer l'impédance du circuit.

On rappelle que dans un triangle quelconque de côtés a, b, c :



$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc.\cos \hat{A}$$

Exercice 36

Un dipôle constitué par les éléments suivants, montés en série, une bobine d'inductance L, un condensateur de capacité C et de résistance totale R = 10Ω. Il est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de valeur efficace constante et de fréquence variable N. On fait varier la fréquence N et on relève l'intensité efficace I :

N(Hz)	160	180	200	205	210	215	220	225	230	240	250	270
I(mA)	1	1,8	4,3	6	8,1	9,3	7,7	5,7	4,7	3,2	2,4	1,5

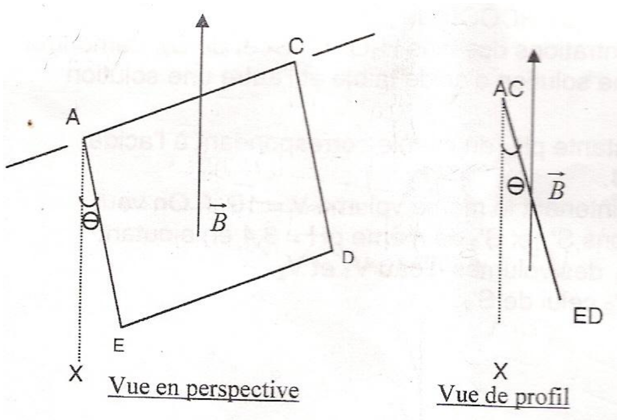
1. Tracer la courbe I = f (N) (1cm pour 10Hz ; 1cm pour 0,5mA)
2. Déterminer graphiquement la valeur I_o de l'intensité efficace du courant à la résonance et la valeur correspondante N_o de la fréquence.
3. La bande passante est définie par les fréquences N_1 et N_2 pour lesquelles $I(N_1) = I(N_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

Déterminer la largeur de la bande passante en fréquence. En déduire son facteur de qualité Q, l'inductance L et la capacité C.

Exercice 37 (bac C 2009).

Partie A

Un cadre carré ACDE de côté a = 20cm est constitué d'un seul tour de fil conducteur rigide, de masse total m = 16g. Ce cadre, mobile sans frottement autour de son côté AC horizontal, est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ vertical, dirigé vers le haut et d'intensité B = 0,1T. Un courant d'intensité I traverse le cadre qui prend alors une position d'équilibre définie par l'angle θ représenté par la figure ci- dessous (l'axe AX est vertical).



1- Représenter sur une figure le sens du courant et les forces électromagnétiques agissant sur les quatre côtés.

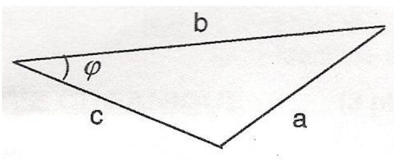
2- Exprimer I en fonction de a, B, m, θet g (g est la valeur du champ de pesanteur). Pour $\theta = 21°$ et g = 9,8 N.kg^{-1}, calculer I.

Partie B

On monte en série aux borne d'une source S sinusoïdal de tension efficace U_S et de fréquence N = 50Hz, un conducteur ohmique de résistance R = 100Ω et d'une bobine de résistance r et d'inductance L inconnues. On relève les tensions efficaces suivantes :

- aux bornes de R : U_R = 100V.
- aux bornes de la bobine : U_b = 100V.
- aux bornes de la source : U_S = 173,2V.

1) Calculer l'intensité efficace I du courant dans le circuit.
2) En raisonnant à partir de la conconstruction de Fresnel :



a – Calculer les déphasages des tensions instantanées aux bornes de la source S et de la bobine par rapport à l'intensité.

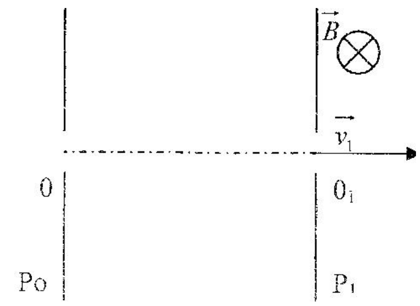
b – En déduire la résistance r et l'inductance L de la bobine.

On rappelle que dans un triagle de côtés a, b et c, on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi$

On donne : $\sqrt{3} \simeq 1,732$

Echelle : 1cm pour 20V.

Exercice 38 (bac D 2009)



Les parties A et B sont indépendantes

A) Une particule $\propto$ passe à travers une électrode P_0 avec une vitesse $\vec{v}_0$ négligeable. Elle est accélérée entre P_0 et une seconde électrode P_1. Elle traverse P_1 avec une vitesse $\vec{v}_1$ (voir figure ci-contre).

1) Calculer la différence de potentiel $u_{P_0P_1} = V_{P_0} - V_{P_1}$ entre P_0 et P_1 sachant que $v_1 = 10^5 m.s^{-1}$.

2) Après passage à travers P_1, *la particule* $\propto$ ayant une vitesse $\vec{v}_1$ entre dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire à $\vec{v}_1$ et orienté comme l'indique la figure ci-contre..
Déterminer le rayon du cercle décrit par la particule $\propto$ sachant que la valeur de $\vec{B}$ est B= 0,01T.

On donne : $\propto = He^{2+}$ q = +2e = $+3{,}2.10^{-19}$C m_{He} = $6{,}64.10^{-27}$Kg

B) Alimentée sous une tension continue U = 12V, une bobine de résistance R et d'inductance L est parcourue par un courant d'intensité I = 0,30A. Alimentée sous une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace U = 12V et de fréquence 50Hz, cette bobine est parcourue par un courant d'intensité efficace I = 0,073A.

1) Calculer la valeur de la résistance R et l'inductance L de la bobine.

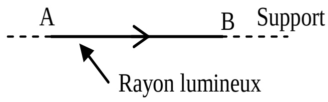
2) Cette bobine est montée en série avec un condensateur de capacité C, l'ensemble est alimenté sous la tension alternative U = 12V, f = 50Hz.
Calculer la valeur de la capacité C pour que l'intensité efficace soit maximale.

3 **Optique géométrique**

Lentilles minces

1- Rayon lumineux

Dans un milieu transparent et homogène, la lumière se propage suivant une ligne droite laquelle est matérialisée par le rayon lumineux. Le rayon lumineux est le trajet rectiligne suivi par la lumière pour passer d'un point à un autre point.



2- Lentilles sphériques

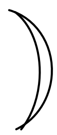
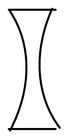
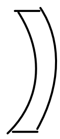
2-1- Exemples :

Les lentilles telles que les verres correcteurs des lunettes, les loupes des microscopes et des jumelles sont utilisées pour améliorer notre capacité à voir ce qui nous entoure.

2-2- Définition :

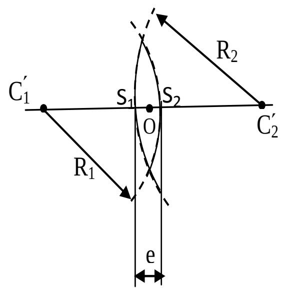
Une lentille sphérique est un milieu transparent, verre, plexiglas, etc., limitée par deux surfaces sphériques ou par une surface sphérique et une surface plane.
Remarque : Une surface plane est une surface sphérique de rayon infini.

2-3- Les deux catégories de lentilles vues de profil

lentilles convergentes : lentilles sphériques à bords minces			lentilles convergentes : lentilles sphériques à bords épais		
 **Lentille** biconvexe	 **Lentille** plan-convexe	 **Ménisque** convergent	 **Lentille** biconcave	 **Lentille** plan-concave	 **Ménisque** divergent

3- Lentilles minces

3-1- Définition :

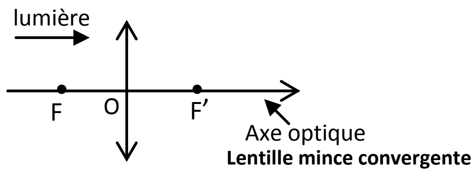


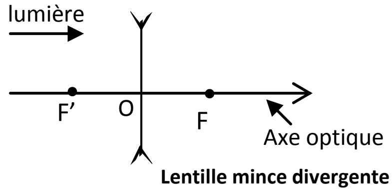
Une lentille sphérique est mince si l'épaisseur e du milieu transparent au niveau de son centre est très inférieure aux rayons des surfaces sphériques.

$S_1S_2 = e << R_1$ et R_2 $\longrightarrow$ les points S_1 et S_2 peuvent être assimilés à un point O appelé **centre optique** de la lentille mince.

3-2- Symboles des deux types de lentilles minces avec leurs éléments (centre optique O, axe optique, foyer principal objet F et foyer principal image F') – Distance focale f'

a- Symboles





L'axe optique est orienté suivant le sens de propagation de la lumière.

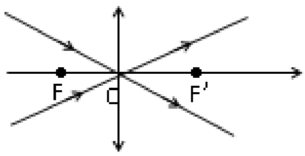
b- Distance focale

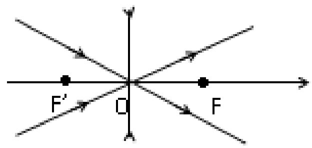
La distance focale f' est une grandeur algébrique de valeur $\overline{OF'}$

Pour une lentille convergente, $f' = \overline{OF'} < 0$ et pour une lentille divergente, $f' = \overline{OF'} > 0$

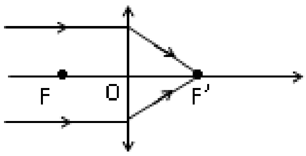
4- Propriétés des trois rayons lumineux particuliers

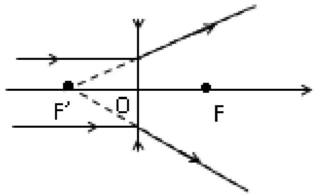
(P_1) : Tout rayon lumineux qui traverse une lentille en passant par son centre optique O n'est pas dévié.



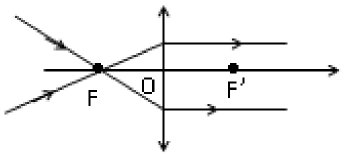


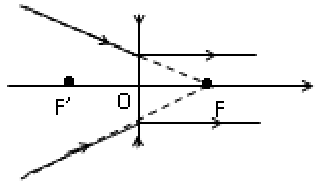
(P_2) : Lorsque les rayons lumineux incidents sont parallèles à l'axe optique, les supports des rayons lumineux sortants passent par F'





(P_3) : Lorsque les supports des rayons lumineux incidents passent par F, les rayons lumineux sortants sont parallèles à l'axe optique.

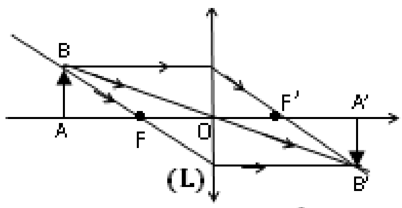




5- Image A'B' d'un objet AB

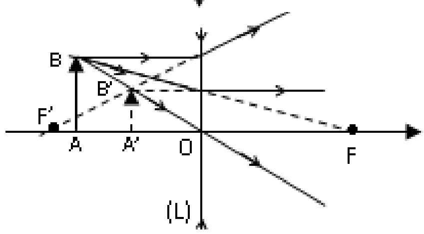
5-1- AB : objet réel (ayant une existence réelle)

A'B' : image réelle placée après L et pouvant être observée sur un écran.



5-2- AB : objet réel (ayant une existence réelle)

A'B' : image virtuelle en pointillée, placée avant L et ne pouvant pas être observée que par l'intermédiaire d'un système optique.

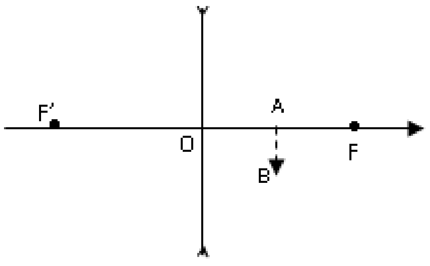


Méthode

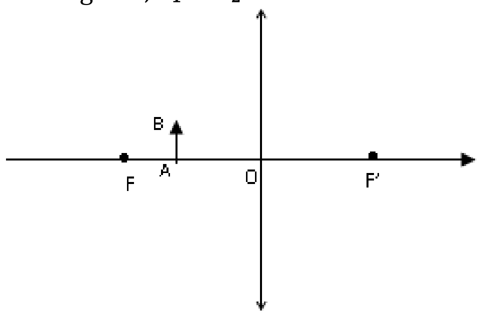
Pour construire l'image A'B' d'un objet AB (source lumineuse) avec A et A' sur l'axe optique :

- déterminer l'image B' de B en utilisant deux rayons lumineux particuliers $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ ou $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_3}$,
- et mener de B' la perpendiculaire à l'axe optique pour obtenir A'.

Applications : construction de l'image A'B' d'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique en utilisant, pour la lentille convergente, $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_3}$ puis, pour la lentille divergente, $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$.



AB : objet virtuel



AB : objet réel

6- Nature et position de A'B' – Sens et grandeur de A'B'

6-1- Relation de conjugaison (formule de Descartes)

Pour une lentille mince, la relation de conjugaison qui permet de déterminer **la nature et la position** de l'image a pour expression : $\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'}$

Applications :

a- On déduit de cette relation que

$$\overline{OA'} = \frac{f' \times \overline{OA}}{f' + \overline{OA}} \begin{cases} \overline{OA'} > 0 : A'B' \, imae \; réelle, située \; à \; la \; distance \; OA' après \; L \\ \overline{OA'} < 0 : A'B' \, image \; virtuelle, située \; à \; la \; distance \; OA' avant \; L \end{cases}$$

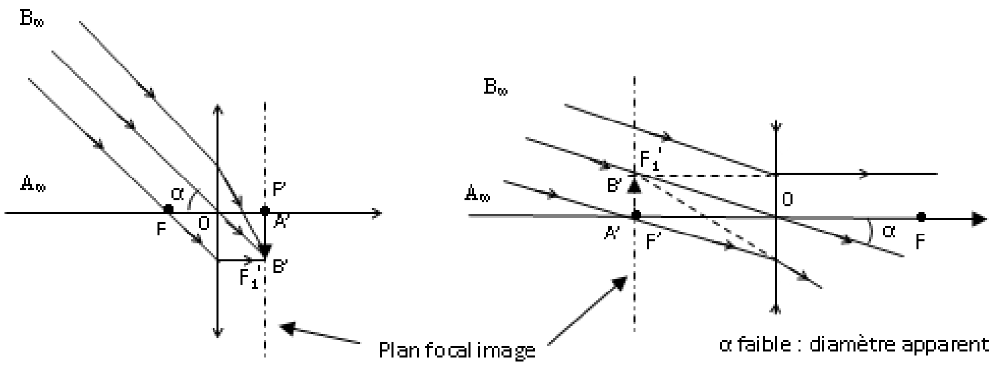
D'après les exemples du paragraphe **5.** :

de **5- 1**→ $\boldsymbol{\overline{OA'}} > 0$: A'B' est une image réelle, située à la distance OA' après L.

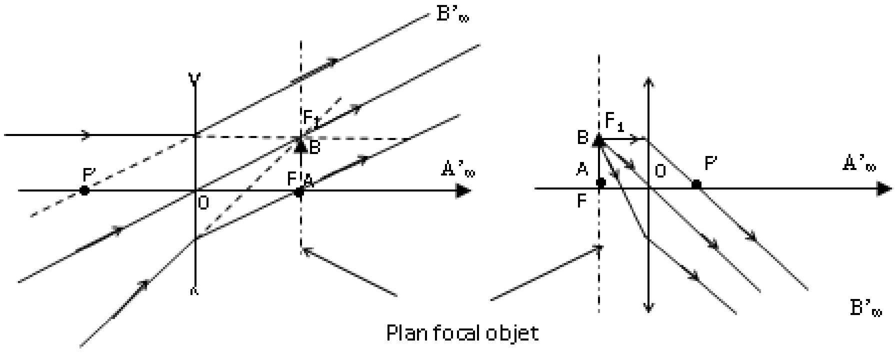
de **5- 2** → $\boldsymbol{\overline{OA'}} < 0$: A'B' est une image virtuelle, située à la distance OA' avant L.

b- L'image A'B' d'un objet réel AB situé a l'infini (exemple le soleil : $\overline{OA} = \infty$) est dans le plan focal image P' ($\overline{OA'} = f'$)

Quand les rayons lumineux incidents sont parallèles à la droite (OF_1'), les supports des rayons lumineux sortants passent par F_1'



c- Un objet réel situé dans le plan focal objet (exemple la phare maritime : $\overline{OA} = -f'$) a son image à l'infini ($\overline{OA'} = \infty$). Quand les supports des rayons lumineux incidents passent par F_1, les rayons lumineux sortants sont parallèles à la droite OF_1



Plan focal objet

6-2- Relation de grandissement

Pour une lentille mince, son grandissement γ qui nous indique l'orientation et la grandeur de l'image est défini par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \begin{cases} \gamma < 0: l'image\ est\ renversée\ par\ rapport\ à\ l'objet (objet\ et\ image\ de\ sens\ opposés) \\ \gamma > 0: l'image\ est\ droite\ par\ rapport\ à\ l'objet (objet\ et\ image\ de\ même\ sens) \\ |\gamma| < 1: l'image\ est\ plus\ petite\ que\ l'objet \end{cases}$$

D'après l'exemple du paragraphe **5-1-,** A'B' est une image renversée et de même longueur que AB.

Autre expression : $\gamma = \frac{f'}{f' + \overline{OA}}$

7- Vergence d'une lentille mince

7-1- Définition :

La vergence Cd'une lentille mince est l'inverse de sa distance focale f :

$$C = \frac{1}{f'} \begin{cases} C > 0: lentille\ convergente \\ C < 0: lentille\ divergente \end{cases}$$

où C en dioptrie (δ) et f' en mètre (m)

7-2- Expression de la vergence

Dans le cas d'une lentille mince, faite d'un verre d'indice n, plongée dans l'air ($n_{air} = 1$) et dont les rayons algébriques de courbure des faces sont $\overline{OC_1'}\ et\ \overline{OC_2'}$ sa vergence C est donnée par l'expression :

$$C = (n-1).\left(\frac{1}{\overline{OC_1'}} - \frac{1}{\overline{OC_2'}}\right)$$

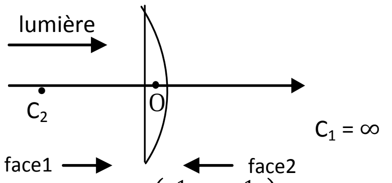
<u>**Exercice résolu 1 :**</u>

Calculer la vergence C et la distance focalef' d'une lentille mince plan-convexe plongée dans l'air sachant que son rayon de courbure R = 50cm et son indice n = 1,5.

Solution

Calcul de la vergence C :

face1 : face recevant le rayon lumineux incident



$C = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{OC_1'}} - \frac{1}{\overline{OC_2'}}\right) = (n-1)\left(0 - \frac{1}{-R}\right)$ d'où $C = \frac{n-1}{R}$ A.N : $C = \frac{1{,}5-1}{0{,}5}$ soit $\boldsymbol{C = 1\delta}$

Calcul de la distance focale : $f' = \frac{1}{C} = \frac{1}{1}$ soit $\boldsymbol{f' = 1m}$

7-3- Vergence d'un système de lentilles minces accolées

a- Cas de deux lentilles minces {L_1, L_2} accolées de vergences respectives C_1 et C_2

$$\underset{\text{Objet}}{AB} \xrightarrow{L_1(C_1)} \underset{\text{image / Objet}}{A_1'B_1'} \xrightarrow{L_2(C_2)} \underset{\text{image}}{A_2'B_2'}$$

$$AB \xrightarrow{L(C)} A_2'B_2'$$

Les deux lentilles minces accolées L_1 et L_2 ont même axe optique et même centre optique O.

Pour L_1 : $\frac{-1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA_1'}} = C_1$ et pour L_2 : $\frac{-1}{\overline{OA_1'}} + \frac{1}{\overline{OA_2'}} = C_2$.

En additionnant membre à membre ces deux relations de conjugaison,

On obtient : $\frac{-1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA_2'}} = C_1 + C_2$ Or $\frac{-1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA_2'}} = C$ pour L = {L_1, L_2}. Donc $\boldsymbol{C = C_1 + C_2}$

b- Cas de n lentilles minces accolées

La vergence de n lentilles minces coaxiaux et accolées est égale à la somme algébrique des vergences des lentilles composantes :

$$C = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \begin{cases} C > 0 : \text{système optique convergent} \\ C = 0 : \text{système optique équivalent à une lame à faces parallèles (vitre)} \\ C < 0 : \text{système optique divergent} \end{cases}$$

7-4- Association de deux lentilles {L_1, L_2}

L'image donnée par la lentille L_1 joue le rôle d'objet pour la lentille L_2

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$$

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \qquad \gamma_2 = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}$$

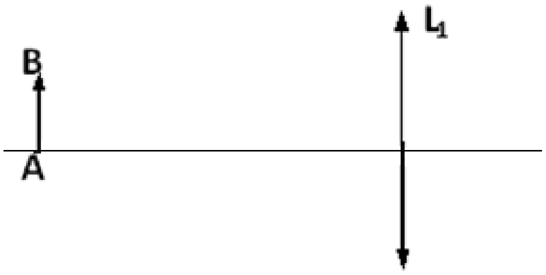
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} \times \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$$

Le grandissement du système formé par les deux lentilles est :

$$\gamma = \gamma_1 . \gamma_2$$

Exercice résolu 2 :

1) A l'aide d'une lentille mince convergente L_1 de distance focale f'_1=4cm, on obtient l'image A_1B_1 d'un objet AB de 1cm de hauteur placé à 6cm de cette lentille (figure 1).



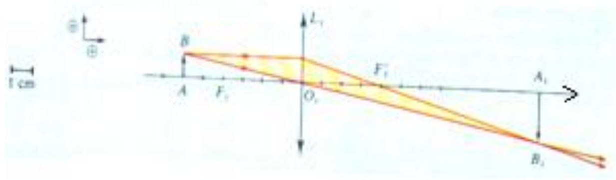
   a) Quelle est la vergence de cette lentille ?
   b) A l'aide d'un schéma en vraie grandeur , déterminer la position et la grandeur de l'image A_1B_1.
   c) Retrouver par le calcul la position de l'image et le grandissement ?

2) Reprendre les questions précédentes, la lentille ayant été remplacée par une lentille divergente L_2 de distance focale f' = -5cm.

3) On considère l'association des deux lentilles précédentes.
   a) Quelle est la vergence de l'association des deux lentilles accolées ?
   b) En réalité, L_2 est placée 3cm derrière L_1, l'objet AB étant toujours placé à 6cm devant L_1. A l'aide d'un schéma en vraie grandeur, déterminer la position et la grandeur de l'image finale A'B'.
   Retrouver ces résultats par le calcul.

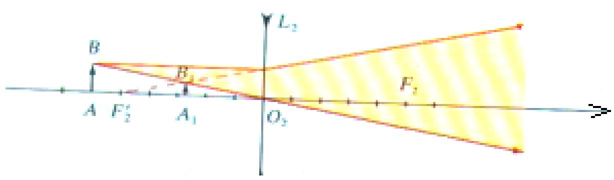
Solution

1)
   a) Par définition la vergence : $C = \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{0{,}04} = 25\delta$
   b) Nous mesurons: $\overline{O_1A_1} = 12cm$, $\overline{A_1B_1} = -2cm$, d'où : $\gamma = -2$



   c) La relation de conjugaison :
   $\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1F'_1}}$
   S'écrit encore $\frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1F'_1}} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4}$
   d'où $\overline{O_1A_1} = 12cm$
   Le grandissement γ s'en déduit : $\gamma = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{12}{-6} = -2$

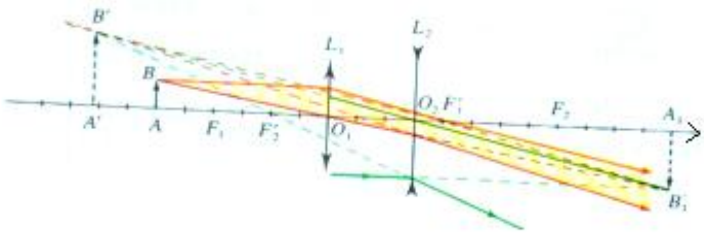
2)
   a) Nous obtenons cette fois : $C = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{0{,}05} = -20\delta$
   b) Nous mesurons : $\overline{O_1A_1} = -2{,}7cm$; $\overline{A_1B_1}$=0,45cm ; d'où $\gamma = 0{,}45$
   c) Utilisons la relation de conjugaison :
   $\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1F'_1}} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{5}$
   d'où $\overline{O_1A_1} = -2{,}7cm$
   Le grandissement γ s'en déduit :
   $\gamma = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{-2{,}7}{-6} = 0{,}45$



3)
   a) La vergence de 'ensemble des lentilles accolées est la somme des vergences de ces lentilles :
   $$C = C_1 + C_2 = 25 - 20 = 5\delta$$
   L'association équivaut donc à une lentille unique de vergence 5 dioptries.
   b) La construction de l'image A_1B_1 de AB à travers L_1 a été effectuée lors de la question 1.Dans le cas présent, les rayons qui forment cette image sont arrêtés par L_2 et l'image

A_1B_1 joue le rôle d'objet virtuel pour L_2 . L'image A'B' de A_1B_1 à travers L_2 (construire à l'aide des rayons traces en vert) est virtuelle (figure 4).
On mesure sur la figure :
$\overline{O_2A'} = -11{,}2cm.$
$\overline{A'B'} = 2{,}5cm.$
$d'où: \gamma = 2{,}5.$

Retrouvons ces résultats par le calcul.
Nous savons que :
$O_1A_1 = 12cm.$
Donc $\overline{O_2A_1} = 12 - 3 = 9cm$
La relation de conjugaison :
$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F'_2}}.$



S'écrit encore :
$\frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{\overline{O_2A_1}} + \frac{1}{\overline{O_2F'_2}}.$
Numériquement :
$\frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{9} - \frac{1}{5}.$

D'où : $\overline{O_2A'} = -11{,}25cm$
Le grossissement γ est le produit des grossissements de chacune des lentilles :
$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} . \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}.$

$\gamma = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} . \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{-11{,}25}{9} \times \frac{12}{-6}.$
On retrouve effectivement : $\gamma = 2{,}5$

Exercice résolu 3

On prend la formule de Descartes sous la forme :

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$$

Avec $\overline{OA}$=p, $\overline{OA'}$=p' , $\overline{OF'}$=f'

1. **Evaluer en fonction de p et f', la distance AA'=y pour p∈ $[-\infty, -f']$.**
2. **Montrer qu'elle passe par un minimum y_m. Calculer p et p' pour ce minimum.**
   Quel est le grandissement correspondant ?
   Faire la construction géométrique correspondante.
3. **Une méthode de mesure de f' consiste à mesurer y_m et à en déduire f' (méthode de Silbermann) . Quel est son intérêt ?**

Solution

1. Distance AA'
   d'après la relation de Chasles :$\overline{AA'}$=y= $\overline{OA'}$-$\overline{OA}$ = p' – p
   p' se calcule par la formule de Descartes :
   $$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$$
   D'où p'= $\frac{pf'}{p+f'}$
   On en tire
   $$y = \frac{pf'}{p+f'} - p = \frac{pf' - p^2 - pf'}{p+f'}$$

$y = \frac{-p^2}{p+f'}$

2. Minimum de y

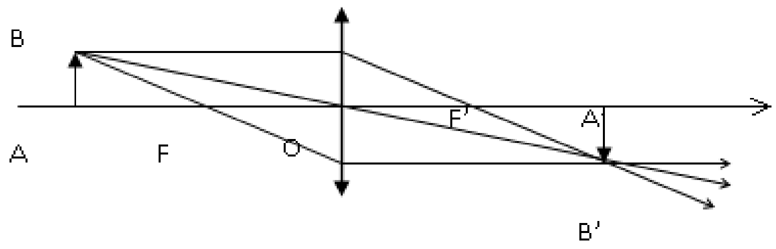
   Calculons la dérivée $\frac{dy}{dp} = \frac{(p+f')(-2p)+p^2}{(p+f')^2} = \frac{-p^2-2pf'}{(p+f')^2}$

   Le cas p=0 n'est pas compris dans l'intervalle $[-\infty, -f']$.

   Il reste p=-2f' qui annule la dérivée. C'est effectivement un minimum puisque y=+∞ aux limites de l'intervalle considéré.

   On a, alors p'=2f' et $y_m = 4f'$.

   Objet et image sont symétriques par rapport à O, et le grandissement est -1, comme le montre la construction.



3. Intérêt de la méthode de Silbermann

   La méthode de Silbermann consiste à mesurer y minimale, en cherchant la position d'un objet qui donne une image égale et renversée ; alors :

   f=$\frac{y}{4}$

   l'intérêt est que , si cette position est mal déterminée, on reste au voisinage d'un minimum de y, donc les variations de y sont faibles, puisque :$\frac{dy}{dp} \approx 0$.

   La valeur de y_m reste correcte, même si p et p' sont plus ou moins bien déterminés.

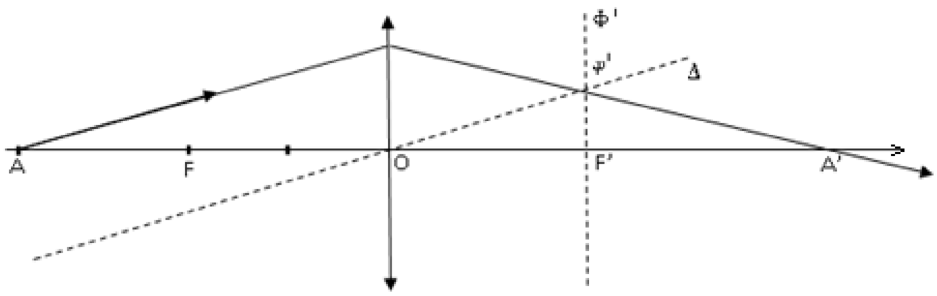
<u>Exercice résolu 4</u>**(Construction de l'image d'un point situé sur l'axe optique)**

1) **Construire l'image d'un point A situé à 6 cm d'une lentille convergente de 2 cm de distance focale.**
   Vérifier par la formule de Descartes le résultat obtenu.
   Il est interdit d'utiliser d'autres points objets que A .
2) **Même question si la lentille est divergente, de distance focale -2 cm.**

Solution

Conseil :Utiliser le propriétés des axes et des foyers secondaires.

1) Construction



On trace un rayon quelconque partant de A et l'axe secondaire Δ′ parallèle à ce rayon.

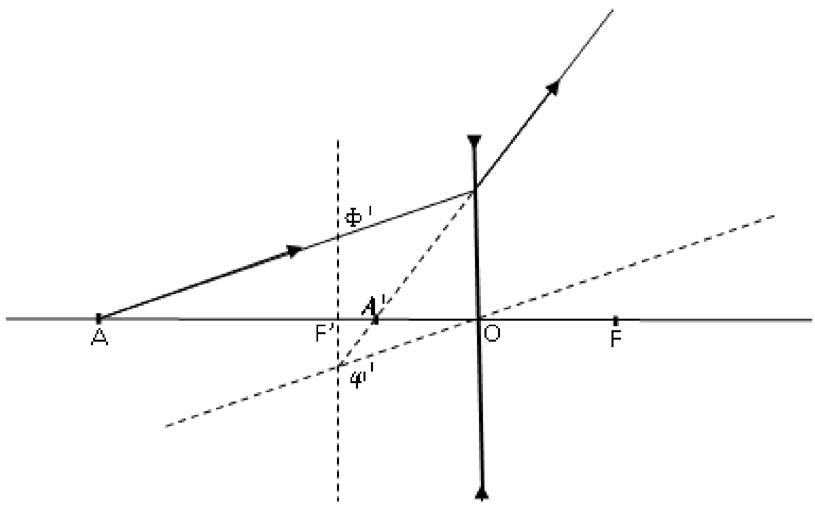
Après réfraction ce rayon passe par le foyer secondaire φ' et recoupe l'axe en A', point cherché. Sur la figure, on lit : $\overline{OA}$ = -6 cm; $\overline{OF'}$ = 2 cm; $\overline{OA'}$= 3 cm

Vérification

$$\frac{-1}{-6}+\frac{1}{\overline{OA'}}=\frac{1}{2}$$

On tire $\overline{OA'}$ = 3 cm

2) Lentille divergente
Construction



La construction se fait de la même façon, mais φ'est virtuel .

Le point A' est virtuel et situé à 1,5 cm de O en avant de la lentille :

$$\overline{OA'}\text{=-1,5cm}$$

Vérification

$$\frac{+1}{+6}+\frac{1}{\overline{OA'}}=-\frac{1}{2}$$

On tire $\overline{OA'}$ = -1,5 cm

EXERCICES

Exercice 1

On place un objet lumineux AB de hauteur 5cm à 40cm d'une lentille convergente L de vergence C = 10 dioptries. Quelles sont les caractéristiques (nature, position, sens, hauteur) de l'image A'B'. Vérifier les résultats par construction géométrique à l'échelle 1/10.

Exercice 2

On veut obtenir d'un objet réel AB, rectiligne et vertical, une image A'B' trois fois plus grande et projetée sur un écran vertical situé à 360cm de l'objet AB.

Déterminer la position et la distance focale de la lentille convergente qui permet d'obtenir ce résultat.

Exercice 3

Un objet lumineux est placé à la distance $L > 4f'$ d'un écran. Entre l'objet et l'écran, on déplace une lentille convergente de distance focale f'.

1. Montrer qu'on peut observer une image nette sur l'écran, pour deux positions différentes de la lentille, situées respectivement à des distances X_1 et X_2 de l'objet.
2. Exprimer f' en fonction de X_1 et de X_2.
3. Calculer f' si $X_1 = 10cm$; $X_2 = 30cm$.

Exercice 4

Une lentille convergente est placée entre une source lumineuse et un écran séparés par une distance de 50cm. On obtient une image nette de la source pour deux positions de la lentille, séparées de d = 22,4cm et symétriques par rapport au milieu I de la source - image. Calculer la distance focale f' de la lentille et les dimensions des deux images sachant que la source est une ligne lumineuse de 2cm de longueur.

Exercice 5

Une lentille divergente donne d'un objet réel situé à 2m de son centre optique, une image virtuelle deux fois plus petite. Quelle est sa distance focale ?

Exercice 6

On place un objet lumineux AB de hauteur 5cm à 15cm d'une lentille divergente L, de divergence C = -10 dioptries. Quelles sont les caractéristiques (nature, position, sens, hauteur) de l'image A'B'. Vérifier les résultats par une construction géométrique à l'échelle 1/10.

Exercice 7

Devant une lentille biconvexe à deux faces dont l'un des rayons est le double de l'autre, est placée une petite droite lumineuse perpendiculaire à son axe principal, sa distance à la lentille est 75cm ; l'image réelle est située à 1,50m de la lentille. Calculer la vergence de la lentille et le rayon de courbure de chaque face de la lentille, l'indice du verre étant n = 1,5.

Exercice 8

Un ménisque convergent de distance focale f' = 5cm a été taillé dans un verre d'indice n = 1,5.

Déterminer les rayons de courbure des deux faces, sachant que l'un est le double de l'autre.

Exercice 9

Le rayon de courbure de la face concave d'une lentille mince plan – concave est 20cm. L'indice du verre est $n = 1,5$. Calculer la vergence C de la lentille.

Exercice 10

Une lentille mince plan – concave donne d'un objet virtuel, situé à 15cm de la lentille et perpendiculaire à l'axe optique, une image réelle située à 60cm de la lentille et de même côté que l'objet par rapport à la lentille. Calculer la distance focale de la lentille et le rayon de courbure de la face concave de la lentille sachant que l'indice du verre est $n = 1,5$.

Exercice 11

Une lentille convergente L_1, dont l'axe principal est vertical, est un ménisque dont les faces ont pour rayon de courbure 12cm et 20cm. L'indice du verre de la lentille est $n = 1,5$. On remplit la face concave d'un liquide d'indice inconnu X. Un objet horizontal placé à 40cm au – dessus du système a son image nette sur un écran disposé à 1,20m en – dessous de L_1. Calculer X.

Exercice 12

Un système optique est formé de lentilles minces accolées ayant même axe principal, l'une convergente de 5 dioptries, l'autre divergente de 40cm de distance focale. A60cm du système optique et perpendiculairement à l'axe optique, on place la ligne lumineuse AB de 2cm de hauteur. Trouver la nature, la position, la grandeur de l'image A'B' de AB donnée par le système.

Exercice 13

On place une droite lumineuse AB de 2cm de hauteur à 75cm d'une lentille convergente L_1de 50cm de distance focale.

1. Déterminer les caractéristiques de l'image A_1B_1 donnée par la lentille L_1.
2. On place une lentille divergente L_2 de distance focale -25cm perpendiculairement à l'axe principal de L_1, à une distance de 1m de L_1 du côté opposé de l'objet AB. Déterminer la nature, la grandeur, la position de l'image A'B' à travers le système des deux lentilles. Construire graphiquement l'image A'B'.

4 Physique nucléaire

Chapitre 1 : Le noyau atomique

1- Composition

Le noyau d'un atome est composé de Z protons et de N neutrons avec N = A – Z où A est le nombre de masse.

2- Représentation symbolique

Le noyau d'un atome d'un élément X est parfaitement défini par le nombre de masse A et le nombre de charge Z. On le note :

$$ {}_{Z}^{A}X \quad \text{où} \quad \begin{cases} \text{A : nombre de masse} \\ \text{Z : nombre de charge (numéro atomique)} \end{cases} $$

Exemple : La représentation symbolique du noyau d'un atome de chlore est : ${}_{17}^{37}Cl$ $\begin{cases} \text{nombre de masse : 37} \\ \text{nombre de charge : 17} \end{cases}$

On peut généraliser cette notation aux particules élémentaires :

neutron : ${}_{0}^{1}n$; proton : ${}_{1}^{1}p$ (ou${}_{1}^{1}H$) ; électron : ${}_{-1}^{0}e^{-}$; positon : ${}_{1}^{0}e^{+}$

N.B : Un nucléide qui est l'ensemble des noyaux de même composition possède aussi la même représentation symbolique ${}_{Z}^{A}X$.

3- Unité de masse atomique (ou masse d'un atome)

L'unité de masse atomique, symbole u, est le douzième de la masse d'un atome de carbone 12 (${}_{6}^{12}C$) :

$$1u = \frac{1}{12}x\left(\frac{12.10^{-3}}{6{,}02.10^{23}}\right)kg = \frac{10^{-3}}{6{,}02.10^{23}}kg \longrightarrow 1u = 1{,}66.10^{-27}kg$$

Application : Pour $m_p \approx m_n = 1u$, m (${}_{Z}^{A}X$) = $Zm_p + Nm_n = (Z+N)u$ $\longrightarrow$ m (${}_{Z}^{A}X$) = Au

Exemples : m (${}_{17}^{37}Cl$) = 37u, m (${}_{8}^{16}O$) = 16u

4- Relation masse – énergie

4-1- Energie de masse

Une particule de masse m possède une énergie de masse E telle que **$E = mC^2$** où C = 3.10^8 $m.s^{-1}$: célérité de la lumière

L'unité d'énergie la plus souvent utilisée en physique nucléaire est le mégaélectronvolt (Mev) tel que :

1Mev = 10^6ev et **1Mev = $1{,}6.10^{-13}$J.**

4-2- Autre unité de masse : Mev/c²

Si l'énergie de masse est en Mev, la masse peut être exprimée, d'après la relation $E = m.C^2$, en **Mev /C²**.

__Exemple :__ Une particule dont l'énergie de masse vaut 8,50 Mev a une masse égale à 8,50Mev / C² et inversement.

Retenons que $1u = 931{,}5 Mev/C^2$avec une meilleure précision de calcul.

4-3- Relation d'Einstein

A toute variation d'énergie ΔE d'un système correspond une variation de masse Δm de sa masse telle que

$$\Delta E = \Delta m.C^2$$

5- Défaut de masse

La dissociation d'un noyau ${}^{A}_{Z}X$en ses nucléons séparés s'écrit :

$$\underbrace{{}^{A}_{Z}X}_{\text{A nucléons liées}} \longrightarrow \underbrace{Z\,{}^{1}_{1}P \quad + \quad (A - Z)\,{}^{1}_{0}n}_{\text{A nucléons séparés}}$$

La conservation de l'énergie totale du système {A nucléons} s'écrit :

$$\underbrace{E_l + m_X C^2}_{\text{Avant la dissociation}} = \underbrace{(Zm_p + (A-Z)\,m_n)C^2}_{\text{Après la dissociation}}$$

Où E_l : énergie de liaison positive et $m_X.C^2$: énergie de masse du noyau X.

On déduit de cette égalité que $m_X.C^2 < (Zm_p + (A-Z)\,m_n).C^2$ ou $m_X < Zm_p + (A-Z)\,m_n$

Conclusion :

- La masse d'un noyau est **toujours inférieure** à la somme des masses de ses nucléons.
- On appelle **défaut de masse Δm** la différence entre la somme des masses des nucléons et la masse du noyau ${}^{A}_{Z}X$:

$$\Delta m = (Zm_p + (A - Z)m_n) - m_X > 0 \quad \text{où } \Delta m \text{ en Mev / C}^2$$

__**Exercice résolu 1 :**__

Calculer le défaut de masse d'un noyau d'hélium (${}^{4}_{2}He$) en Mev / C²

Données : $m_p = 1{,}00728u$; $m_n = 1{,}00866u$; masse atomique d'hélium : $m_{He} = 4{,}0015u$; $1u = 931{,}5Mev/C^2$

Solution

Composition du noyau d'hélium : nombre de protons Z = 2, nombre de neutrons A – Z = 4 – 2 = 2

Défaut de masse du noyau d'hélium :

$$\Delta m = (Zm_p + (A - Z)m_n) - m_{He} = (2x1{,}00728 + 2x1{,}00866 - 4{,}0015)u \text{ x } \frac{931{,}5Mev/C^2}{u} \text{ soit}$$

$$\Delta m = 28{,}3Mev/C^2$$

__**Remarque :**__

La dissociation du noyau ${}^{A}_{Z}X$qui est une réaction nucléaire respecte les deux lois de conservation :

- Conservation du nombre de nucléons : A = Z.1 + (A – Z).1 = A

- Conservation de la charge électrique : Z = Z.1 + (A – Z).0 = Z

6- Energie de liaison

L'énergie de liaison, notée E_l, est l'énergie nécessaire pour dissocier un noyau en ses nucléons séparés. Son expression est :

$$E_l\left({}^{A}_{Z}X\right) = \Delta m.C^2 \quad \text{ou} \quad E_l\left({}^{A}_{Z}X\right) = (Zm_p + (A-Z)\,m_n - m_X)C^2 > 0$$

Remarque : L'énergie de formation du noyau ${}^{A}_{Z}X$ est $-E_l\left({}^{A}_{Z}X\right) < 0$ selon la réaction nucléaire d'équation–bilan :

$$Z\,{}^{1}_{1}P \quad + \quad (A - Z)\,{}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{A}_{Z}X$$

Exemple : Energie de liaison du noyau d'hélium $E_l\left({}^{4}_{2}He\right) = \Delta m.C^2 = 28{,}3\,\frac{Mev}{C^2} \times C^2$ soit $\boxed{E_l\left({}^{4}_{2}He\right) = 28{,}3\,Mev}$

Son énergie de formation est $\boxed{-E_l\left({}^{4}_{2}He\right) = -28{,}3\,Mev}$

7- Energie de liaison par nucléon

L'énergie de liaison par nucléon d'un noyau ${}^{A}_{Z}X$, notée $E_a\left({}^{A}_{Z}X\right)$, est définie par la relation

$$E_a\left({}^{A}_{Z}X\right) = \frac{E_l\left({}^{A}_{Z}X\right)}{A}$$

Un noyau ${}^{A}_{Z}X$ est stable lorsque $E_a\left({}^{A}_{Z}X\right) > 8$ Mev

Exemple :

Energie de liaison par nucléon du noyau d'hélium $E_a\left({}^{4}_{2}He\right) = \frac{E_\ell\left({}^{4}_{2}He\right)}{A} = \frac{28{,}3}{4}$ soit $\boxed{E_a\left({}^{4}_{2}He\right) = 7{,}08\,Mev}$

$E_a\left({}^{4}_{2}He\right) < 8\,Mev$: le noyau d'hélium est instable.

Chapitre 2 : La radioactivité et les réactions nucléaires spontanées

1- Définitions

Par définition, la radioactivité est la ***transformation spontanée*** d'un noyau instable en un autre noyau, accompagnée de l'émission d'une (ou plusieurs) particule(s).

Le noyau instable est dit ***noyau radioactif*** et cette réaction nucléaire spontanée, réaction se réalisant seule sans intervention de l'extérieure pour la déclencher, est appelée ***désintégration radioactive***.

2- Radioactivités α (alpha) et β (bêta)

2-1- Radioactivité α

a- Définition

La radioactivité α (ou désintégration α) est la transformation spontanée d'un noyau lourd (A>200) en un autre noyau accompagnée de l'émission d'un noyau d'hélium.

b- Interprétation

Comme le noyau instable $^A_Z X$ne contient que de protons et de neutrons, l'émission de la particule α, noyau d'hélium$^4_2\boldsymbol{He}$, provient de l'expulsion spontanée de 2 protons et de 2 neutrons selon l'écriture $2^1_1P + 2^1_0n = {}^4_2\boldsymbol{He}$

c- Equation – bilan :

$^A_Z\boldsymbol{X}$ (noyau père) $\longrightarrow$ $^{A'}_{Z'}\boldsymbol{Y}$(noyau fils) $+$ $^4_2\boldsymbol{He}$

$\mathrm{A} = \mathrm{A'} + 4 \rightarrow \mathrm{A'} = \mathrm{A} - 4$

D'après les lois de conservation : - conservation du nombre de nucléons :

$\mathrm{Z} = \mathrm{Z'} + 2 \rightarrow \mathrm{Z'} = \mathrm{Z} - 2$

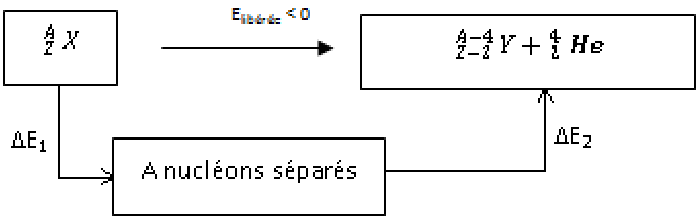
- et la conservation de la charge électrique :

On obtient $\boxed{^A_Z X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2\boldsymbol{He}}$

Exemple : La désintégration α d'un noyau de radium ($^{226}_{88}Ra$) en un noyau de radon, en respectant les deux lois de conservation, s'écrit : $^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}R_n + {}^4_2\boldsymbol{He}$

d- Energie libérée

L'expression de l'énergie libérée $E_{libérée}$, lors de la radioactivité α, est obtenue en considérant le schéma suivant :



Où ΔE_1 : El $({}^{A}_{Z}X)$ (énergie de liaison)

Et ΔE_2 : -El $({}^{A-4}_{Z-2}Y)$ -El $({}^{4}_{2}He)$ (énergies de formation)

$E_{libérée} = \Delta E_1 + \Delta E_2$

Donc $E_{libérée} =$ El $({}^{A}_{Z}X)$ – $\left(\text{El } ({}^{A-4}_{Z-2}Y) + \text{El } ({}^{4}_{2}He)\right)$

Soit encore $E_{libérée} = (m_Y + m_{He} – m_X)C^2$ (à établir)

e- Propriétés

La vitesse des particules α émises est de l'ordre de 2 10^4km/s. Ces particules α provoquent l'ionisation de la matière qu'elles rencontrent. Elles sont peu pénétrantes : une feuille de papier suffit à les arrêter.

2-2- Radioactivité β^- - Radioactivité β^+

	Radioactivité β^-	Radioactivité β^+
Définition	C'est la transformation spontanée d'un noyau instable en un autre noyau, accompagnée d'émission d'un électron e^- et d'un antineutrino $\bar{\nu}$(particule neutre et de masse nulle).	C'est la transformation spontanée d'un noyau instable en un autre noyau, accompagnée d'émission d'un positon e^+et d'un neutrino ν(particule neutre et de masse nulle).
Interprétation	L'apparition d'un électron et d'un antineutrino provient de la transformation spontanée, dans le noyau${}^{A}_{Z}X$, d'un neutron en proton : ${}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}P + {}^{0}_{-1}e^- + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$	L'apparition d'un positon et d'un neutrino provient de la transformation spontanée, dans le noyau${}^{A}_{Z}X$, d'un proton en neutron : ${}^{1}_{1}P \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{1}e^+ + {}^{0}_{0}\nu$
Equation - bilan	Les deux lois de conservations sont respectées en écrivant : ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z+1}^{A}Y + {}^{0}_{-1}e^- + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$	Les deux lois de conservations sont respectées en écrivant : ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + {}^{0}_{1}e^+ + {}^{0}_{0}\nu$
Energie libérée	$E_{libérée} = E_l\,({}^{A}_{Z}X)$ - $E_l\,({}_{Z+1}^{A}Y) < 0$ ou $E_{libérée} = (m_Y + m_e - m_X)C^2 < 0$	$E_{libérée} = E_l\,({}^{A}_{Z}X)$ - $E_l\,({}_{Z-1}^{A}Y) < 0$ ou $E_{libérée} = (m_Y + m_e - m_X)C^2 < 0$
Propriétés	La vitesse des électrons et des positons émis par les noyaux pères instables est de l'ordre de 270 000km/ Ces électrons et ces positons sont beaucoup plus pénétrants. Ils sont arrêtés par quelques millimètres d'aluminium	

3- Rayonnement γ

Lorsque le noyau fils formé par radioactivité α ou β^- ou β^+ est à l'état excité $({}^{A'}_{Z'}Y^*)$, c'est – à – dire qu'il possède un excédent d'énergie, il se désexcite $({}^{A'}_{Z'}Y)$ en émettant un rayonnement γ (ensemble de photons) qui emporte cet excédent d'énergie. Dans ce cas, l'équation – bilan traduisant la radioactivité α ou β^- ou β^+ s'écrit :

$^{A}_{Z}X \rightarrow\ ^{A-4}_{Z-2}Y\ +\ ^{4}_{2}\boldsymbol{He} + \boldsymbol{\gamma}$ ou $^{A}_{Z}X \rightarrow\ _{Z+1}^{\ \ A}Y\ +\ ^{\ 0}_{-1}e^{-}\ +\ ^{0}_{0}\bar{\nu} + \boldsymbol{\gamma}$ ou $^{A}_{Z}X \rightarrow\ _{Z-1}^{\ \ A}Y\ +\ ^{0}_{1}e^{+}\ +\ ^{0}_{0}\nu\ +\ \boldsymbol{\gamma}$

Donc le rayonnement γ accompagne la radioactivité α ou β^- ou β^+ si le noyau fils formé est à l'état excité.

Propriétés : Le rayonnement γ se propage à la célérité de la lumière (C = 3.10^8m/s). Il est très pénétrant et il faut plusieurs décimètres de plomb ou plusieurs mètres de béton pour l'arrêter.

<u>**Exercice résolu 2 :**</u>

Le polonium $^{214}_{84}\boldsymbol{Po}$, radionucléide α, se désintègre en donnant un noyau de plomb dans son état fondamental.

1) **Ecrire l'équation-bilan de la désintégration en précisant les lois de conservation de nombre de masse A et de nombre de charge Z. Identifier le noyau fils.**

   On donne :
   Po : m = 209,9369 u
   Pb : m = 205,9296 u
   He : m = 4,0015 u
   Massa du proton : 938 MeV/c^2
   Masse du neutron : 940 MeV/c^2
   Et : 1u = 931,5 MeV/c^2.
2) **a) Calculer les défauts de masses de $^{214}_{84}\boldsymbol{Po}$, $^{210}_{82}\boldsymbol{Pb}$ et $^{4}_{2}\boldsymbol{He}$.**
   b) calculer les énergies de liaisons de $^{214}_{84}\boldsymbol{Po}$, $^{210}_{82}\boldsymbol{Pb}$ et $^{4}_{2}\boldsymbol{He}$.
   c) En déduire l'énergie libérée au cours de la réaction de désintégration de $^{214}_{84}\boldsymbol{Po}$, en MeV.

Solution

1- Equation de la désintégration de $^{214}_{84}Po$
$^{214}_{84}Po\ \rightarrow\ ^{A}_{Z}Y + \ ^{4}_{2}He.$

Lois de conservation de nombre de masse et nombre de charge :
214 = A +4
84 =Z +2
Alors : A =210
Z = 82, qui caractérise l'élément de Plomb Pb
$^{214}_{84}Po\ \rightarrow\ ^{210}_{82}Pb + \ ^{4}_{2}He.$

2- a) défaut de masse :
Δm($^{214}_{84}Po$) = 84.938+(214-84).940 - 209,9369. 931,5
=5435,7776 MeV.c^{-2}
Δm($^{210}_{82}Pb$) = 82.938+(210-82).940 - 205,9296. 931,5
= 5412,5776 MeV.c^{-2}
Δm($^{4}_{2}He$) = 2.938+(4-2).940 - 4,0015. 931,5
=28,6027 MeV.c^{-2}
b) énergie de liaison :
El ($^{214}_{84}Po$) = Δm($^{214}_{84}Po$).c^2
= 5435,7776 Mev
El ($^{210}_{82}Pb$) = Δm($^{210}_{82}Pb$).c^2
= 5412,5776 Mev
El ($^{4}_{2}He$) = Δm($^{4}_{2}He$).c^2
= 28,6027 Mev .
c) énergie libérée lors de la désintégration $^{214}_{84}Po$:
$E_{libérée}$ = El ($^{214}_{84}Po$) – [El ($^{210}_{82}Pb$) + El ($^{4}_{2}He$)]
= -5,40275 MeV.

4- Période radioactive

4-1- Définition

La période radioactive (ou demi – vie) d'un nucléide est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux de ce nucléide subit la désintégration.

4-2- Evolution du nombre N de noyaux radioactifs d'un nucléide au cours du temps t.

T : période radioactive d'un échantillon radioactif

Temps t	0	T	2T	3T
Nombre de noyaux radioactifs restants	$\boldsymbol{No}$	$\frac{No}{2}$	$\boldsymbol{\frac{No}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{No}{8}}$

5- Loi de décroissance radioactive

5-1- Expression

Soient N' le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t' et N' + dN' le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t' + dt'

Le nombre de noyaux désintégrés pendant la durée élémentaire dt' est alors N' – (N' + dN') = – dN' > 0

Comme la quantité – dN' est proportionnelle à dt' et N',on peut écrire : – dN' = λN'.dt' (1)

D'après la relation (1), on obtient la nouvelle relation (2) : $\frac{dN'}{N'} = -\lambda dt'$ où λ : constante de proportionnalité appelée constante radioactive des noyaux étudiés.

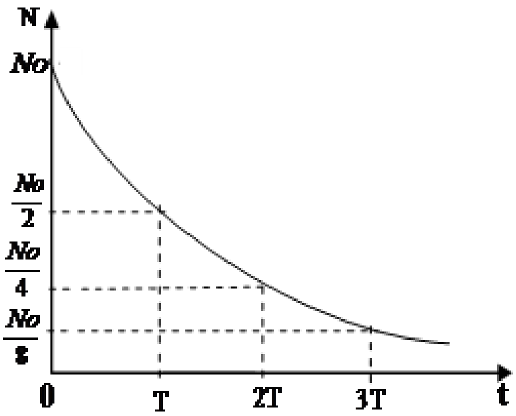
Par intégration de la relation (2) : $\int_{No}^{N} \frac{dN'}{N'} = -\lambda \int_{0}^{t} dt'$,

on obtient $\ln \frac{N}{No} = -\lambda t$

Soit $\boxed{N = Noe^{-\lambda t}}$

No : nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant t= 0

N : nombre de noyaux radioactifs



5-2- Conséquences

a- <u>Relation entre λ et T</u> : si t = T alors $\frac{No}{2} = Noe^{-\lambda T} \leftrightarrow e^{\lambda T} = 2$

donc $\boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{T} \text{ ou } T = \frac{\ln 2}{\lambda}}$

b- <u>Expression particulière</u>

Si t = nT avec n nombre entier naturel non nul alors :

$$N = Noe^{-\lambda nT} \; avec \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{T} \rightarrow N = \frac{No}{2^n}$$

c- **Expression équivalente :**

Comme $No = N_A.\frac{m_0}{M}$ *et* $N = N_A.\frac{m}{M}$ où m et m_o masses de la substance radioactive aux instants respectifs 0 et t > 0, N_A= 6,02.10^{23}mol^{-1} : nombre d'Avogadro, M : masse molaire atomique de la substance radioactive, on a :

$$N_A\frac{m}{M} = N_A\frac{m_0}{M}e^{-\lambda t} \Longrightarrow \boldsymbol{m = m_0 e^{-\lambda t}}$$

6- Activité d'une substance radioactive

6-1- Définition :

L'activité A d'une substance radioactive représente le nombre de désintégration par seconde.

6-2- Expression

D'après la définition, $A = \frac{-dN}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(Noe^{-\lambda t}\right) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$ *soit* $\left\{\begin{array}{l}\text{A en Bq (becquerel)}\\ \lambda \text{ en } s^{-1}\end{array}\right.$

$$\boxed{\boldsymbol{A = \lambda N}}$$

6-3- Loi de variation de A:

La loi de variation A au cours du temps qui est déduite de celle de la décroissance radioactive a pour expression :

$$\boldsymbol{A = A_0 e^{-\lambda t}}$$

où A_0 : activité à t = 0 et A : activité à t > 0

Elle permet de dater les objets anciens.

Remarque : si **t = nT** où n nombre entier naturel non nul alors $A = Aoe^{-\lambda nT}$ avec $\lambda = \frac{\ln 2}{T} \rightarrow \boldsymbol{A = \frac{A_0}{2^n}}$

Exercice résolu 3

L'élément carbone est composé principalement des deux isotopes stables, le $^{12}_{6}C$ (98,90% d'atomes) et le $^{13}_{6}C$ (1,10% d'atomes). D'autre part, le carbone contient encore une très petite partie de l'isotope radioactif $^{14}_{6}C$ (de période T = 5 730 années), qui est formé continuellement sous forme de dioxyde de carbone CO_2 dans l'atmosphère terrestre, par l'effet des radiations cosmétiques et qui se mélange par l'intermédiaire du cycle CO_2 de la nature, aux isotopes $^{12}_{6}C$ et $^{13}_{6}C$.

1- **Quelle est la relation mathématique existant entre la constante radioactif λ et la période T.**
2- **Pour le taux de désintégration du carbone participant au cycle CO_2 de la nature, on trouve la valeur de 13,6 désintégrations par minute et par gramme de carbone.**

Quand une matière végétale meurt, elle ne participe plus au cycle CO_2 de la nature. Par conséquent le taux de décomposition du carbone diminue.

Pour un morceau de bois ayant fait partie d'un navire Viking, on mesure en 1983, 12,0 désintégration par minute et par gramme de carbone.

En quelle année l'arbre ayant fourni ce bois a-il-été abattu ?

3- **Quelle est la valeur du rapport isotopique $^{12}_{6}C/^{14}_{6}C$ du carbone participant au cycle CO_2 de la nature ?**

1année = 365 jours ; N_A = 6,02.10^{23} mol^{-1}.

Solution

1- N = $\frac{N_0}{2}$ pour t = T d'où :

N = $N_0 . e^{-\lambda t}$ s'écrit $\frac{N_0}{2} = N_0 . e^{-\lambda T}$

Soit : $\lambda = \frac{ln2}{T} = \frac{0,693}{T}$.

2- L'activité d'une source :

Par définition : $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$, alors $A = A_0 . e^{-\lambda t}$

A = 12 désintégration par minute

$t = \frac{T}{ln2} . ln\frac{A_0}{A} = \frac{5\,730}{0,693} . ln\frac{13,6}{12} = 1\,035$ années.

L'arbre a été abattu en l'an 2010 – 1 035 = 948.

3- $A = \lambda . N$ d'où : $N = \frac{T}{ln2} . A$

$N({}^{14}_{6}C) = \frac{5\,730.363.24.60.13,6}{0,693} = 5,9.10^{10}$

Dans 1g de carbone, il y a donc :

$5,9.10^{10}$ atomes de carbone 14

Le carbone 12 est dans lune proportion de 0,989, donc dans 1g de carbone le nombre de ${}^{12}_{6}C$ est :

$N({}^{12}_{6}C) = \frac{1}{12} . 0,989.6,02.10^{23} = 4,96.10^{22}$.

Le rapport $\frac{N({}^{12}_{6}C)}{N({}^{14}_{6}C)}$ vaut donc $8,40.10^{11}$

Chapitre 3 : Les réactions nucléaires provoquées

1- Définition

Par définition, une réaction nucléaire est provoquée si elle est déclenchée par le choc d'une particule sur un noyau atomique ou par le choc de deux ou plusieurs noyaux atomiques.

2- Transmutation

C'est une réaction nucléaire provoquée qui conduit à la formation de nouveaux noyaux et vérifie les deux lois de conservation qu'une réaction nucléaire spontanée.

2-1- Transmutation (α, p) de l'azote $^{14}_{7}N$en oxygène :

$$^{4}_{2}He + ^{14}_{7}N \rightarrow ^{1}_{1}H + ^{17}_{8}O^{*}$$

2-2- Transmutation (n, α) du lithium $^{6}_{3}Li$en tritium radioactif :

$$^{1}_{0}n + ^{6}_{3}Li \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{3}_{1}H^{*}$$

2-3- Transmutation (p, n) du sélénium$^{82}_{34}Se$ en brome radioactif :

$$^{1}_{1}p + ^{82}_{34}Se \rightarrow ^{1}_{0}n + ^{82}_{35}Br^{*}$$

3- La fission nucléaire

3-1- Définition

Par définition, la fission nucléaire est une réaction où, sous le choc d'un neutron lent, un noyau lourd ($A > 200$) se scinde en deux noyaux plus légers ayant chacun une énergie de liaison par nucléon plus élevée. Elle émet d'autres neutrons.

Un neutron est lent si sa vitesse est de l'ordre de 2200m/s. Son énergie cinétique est d'environ 0,025Mev ce qui est très faible.

3-2- La fission de l'uranium 235

a- La fission de l'uranium 235 est une réaction nucléaire provoquée par le choc d'un neutron lent. Elle conduit à la formation de deux noyax plus légers et libère de l'énergie nucléaire de l'ordre de 200Mev.

b- Equation – bilan :

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \rightarrow \; ^{A_1}_{Z_1}Y_1 + ^{A_2}_{Z_2}Y_2 \quad + \quad (2 \text{ ou } 3)\, ^{1}_{0}n \quad + \quad \gamma$$

__Remarque :__

Les neutrons figurant dans les deux membres jouent des rôles totalement différents : on ne peut pas les simplifier

c- Exemples : Exemple 1 : $^{1}_{0}n \; + \; ^{235}_{92}U \; \rightarrow \; ^{95}_{38}Sr \; + \; ^{139}_{54}Xe \; + \; 2\,^{1}_{0}n \; + \; \gamma$

Exemple 2 : $^{1}_{0}n \; + \; ^{235}_{92}U \; \rightarrow \; ^{91}_{36}Kr \; + \; ^{142}_{56}Ba \; + \; 3\,^{1}_{0}n \; + \; \gamma$

La fission de l'uranium 235 peut produire des réactions en chaîne car les neutrons émis peuvent, à leur tour, engendrer des réactions de fission par choc avec d'autres noyaux d'uranium 235.

Pour qu'une réaction en chaîne soit possible, il faut enrichir en isotope 235 les **noyaux d'uranium fissiles** (noyaux capables de subir les réaction de fission) utilisés.

3-3- Application

Les réactions de fission contrôlées sont des réactions en chaîne utilisées comme sources d'énergie dans les centrales nucléaires qui produisent de l'électricité.

<u>Exercice résolu 4</u>

Une réaction nucléaire de fission de l'uranium peut s'écrire :

$\boldsymbol{{}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{139}_{53}I + {}^{94}_{x}Y + y{}^{1}_{0}n.}$

1) **Déterminer x et y.**
2) **Calculer la perte de masse dans cette réaction.**
3) **Calculer en joule, l'énergie libérée par 1 kg d'uranium 235.**

Masses : $\boldsymbol{{}^{235}_{92}U : 235,044\ u}$; $\boldsymbol{{}^{139}_{53}I : 138,905\ u}$; $\boldsymbol{{}^{94}_{x}Y : 93,906\ u\ \ et\ {}^{1}_{0}n : 1,009\ u.}$

N_A = 6,02.10^{23} mol^{-1} , 1u = 931,5 MeV.c^{-2} et 1Mev = 1,6.10^{-13} J

Solution

1- Détermination de x et y :

$${}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{139}_{53}I + {}^{94}_{x}Y + y{}^{1}_{0}n.$$

Lois de conservation de nombre de masse et de nombre :

1+235 = 139+94+y, d'où y = 3

92= 53+x, d'où : x =39

2- Perte de masse :

$\Delta m = m{}^{139}_{53}I + m{}^{94}_{x}Y + 2.m\,{}^{1}_{0}n - m{}^{235}_{92}$

$= 138,905 + 93,906 + 2.1,009 - 235,044.$

=-0,215 u

= -0,215.931,5MeV.c^{-2}

= -200,2725 MeV.c^{-2}

3- Energie libérée par 1 kg d'uranium 235:

$E_{libérée}$ pour un noyau = Δm.c^2.

=-200,2725MeV

n = Nombre de noyaux dans 1kg de U 235

$= \frac{10^3}{235}.6,02.10^{23}$

= 2,56.10^{24}noyaux d'U 235

$E_{libérée}$ pour 1kg d'U 235 en MeV =-200,2725. 2,56.10^{24}

= - 513,038.10^{24}Mev

$E_{libérée}$ pour 1kg d'U 235 en joules = - 513,038.10^{24}.1,6.10^{-13}

= -1,0275.10^{16} J

4- La fusion nucléaire

4-1- Définition

Par définition, La fusion nucléaire est une réaction due au choc de 2 ou plusieurs noyaux légers ($A < 30$) pour donner un noyau plus lourd ayant une énergie de liaison par nucléon plus élevée.

Pour qu'une réaction de fusion ait lieu, les noyaux légers doivent avoir une très grande énergie cinétique, supérieure à 0,1Mev, pour vaincre les forces de répulsion entre eux. Une telle énergie ne peut être atteinte qu'à une température extrêmement élevée, de l'ordre de 100 millions de degrés célcius. C'est pourquoi, la fusion nucléaire est précédée de la réaction de fission.

4-2- Exemples

__Exemple 1__ : Les seules réactions qui se produisent naturellement dans les étoiles sont les fusions entre deux isotopes de l'hydrogène, le deutérium et tritium, selon les équations suivantes :

$${}_1^2H \; + \; {}_1^2H \;\rightarrow\; {}_1^3H \; + \; {}_1^1H \quad (E_{\text{libérée}} = -\,4\text{Mev})$$

$${}_1^2H \; + \; {}_1^2H \;\rightarrow\; {}_2^3He \; + \; {}_0^1n \quad (E_{\text{libérée}} = -\,3{,}2\text{Mev})$$

$${}_1^2H \; + \; {}_1^3H \;\rightarrow\; {}_2^4He \; + \; {}_0^1n \quad (E_{\text{libérée}} = -\,17{,}6\text{Mev})$$

__Exemple 2__ : C'est la fusion d'hydrogène en hélium qui est à l'origine de l'énergie rayonnée par le soleil selon l'équation :

$$4\,{}_1^1H \;\rightarrow\; {}_2^4He \; + \; 2\,{}_1^0e^+ \; + \; {}_0^0\nu \; + \; 2\gamma$$

__Exercice résolu 5__

Descente dans l'étoile

Dans une étoile, on trouve essentiellement des noyaux d'hydrogène, qui par le cycle dit : « proton-proton », conduisent à la synthèse de l'hélium.

1) **a) Ecrire l'équation de ce cycle.**
   b) Quelle est l'énergie libérée au cours de ce cycle en MeV et en joules ?
2) **Dans une étoile, on trouve aussi des noyaux de carbone. Ceux-ci sont utilisés comme point de départ d'une chaine de réactions nucléaires. Cette chaine de réactions s'appelle le cycle CNO. C'est un cycle fermé comprenant six réactions nucléaires. Le carbone ${}_6^{12}C$ qui est utilisé comme réactif initial, réapparait à la fin du cycle quand un noyau d'hélium est formé.**
   a) Compléter les bilans des six réactions nucléaires suivantes qui interviennent dans ce cycle :

$${}_6^{12}C + \cdots \;\rightarrow\; {}_7^{13}N$$

$${}_7^{13}N \;\rightarrow\; {}_6^{13}C + \cdots$$

$${}_6^{13}C + \cdots \;\rightarrow\; {}_7^{14}N$$

$${}_7^{14}N + \ldots \;\rightarrow\; {}_8^{15}O$$

$${}_8^{15}O \;\rightarrow\; {}_7^{15}N + \cdots$$

$${}_7^{15}N + {}_1^1H \;\rightarrow\; {}_6^{12}C + \cdots$$

   b) Montrer que le bilan global de ce cycle est identique à celui du cycle proton-proton vu à la question 1).
   On donne :
   C = 300 000km.s^{-1} ; e = 1,6.10^{-19}C ; m$_e$ = 5,486.10^{-4} u ; 1 u = 1,661.10^{-27}kg = 931,5 MeV.C^{-2}.
   Masses : ${}_1^1H = 1{,}0073$ u ;${}_1^2H = 2{,}013$ u ; ${}_2^3He = 3{,}0149$ u et ${}_2^4He = 4{,}0015$ u.

Solution

1- a) Equation du cycle :

$4.{}_{1}^{1}H \rightarrow {}_{2}^{4}He + 2{}_{1}^{0}e.$

b) Energie libérée au cours de ce cycle :

$\Delta m = m{}_{2}^{4}He + m{}_{1}^{0}e - 4m{}_{1}^{1}H$

$E_{libérée} = \Delta m.c^2 = (m{}_{2}^{4}He + m{}_{1}^{0}e - 4m{}_{1}^{1}H).c^2$

A N:

$E_{libérée} = (4{,}0015 + 2.5{,}486.10^{-4} - 4.\ 1{,}0073)\ 1{,}661.10^{-27}.9.10^{16}$

$= -0{,}4140873.10^{-11}J$

$= -0{,}4140873.10^{-11}.\frac{1}{1{,}6.10^{-13}}$

$= -0{,}258805.10^{2}MeV$

$= -\ 25{,}8805\ MeV$

2- a) Complétons les équations nucléaires du cycle CNO :

$${}_{6}^{12}C + {}_{1}^{1}H \rightarrow {}_{7}^{13}N$$
$${}_{7}^{13}N \rightarrow {}_{6}^{13}C + {}_{1}^{0}e$$
$${}_{6}^{13}C + {}_{1}^{1}H \rightarrow {}_{7}^{14}N$$
$${}_{7}^{14}N + {}_{1}^{1}H \rightarrow {}_{8}^{15}O$$
$${}_{8}^{15}O \rightarrow {}_{7}^{15}N + {}_{1}^{0}e$$
$${}_{7}^{15}N + {}_{1}^{1}H \rightarrow {}_{6}^{12}C + {}_{2}^{4}He$$

b) Le bilan de cycle CNO :

Par addition membre à membre, on a :

$$4.{}_{1}^{1}H \rightarrow {}_{2}^{4}He + 2.{}_{1}^{0}e$$

<u>Exercice résolu 6</u>

On considère la réaction nucléaire suivante d'équation :

$\boldsymbol{{}_{6}^{13}C + {}_{2}^{4}He \rightarrow {}_{8}^{16}O + {}_{0}^{1}n.}$

1— De quel type de réaction s'agit-il ?

2— Déterminer l'énergie libérée par la réaction.

données **: $E_a(C)$ = 7,6 MeV/nucléon, : $E_a(O)$ = 8,0 MeV/nucléon et : $E_a(He)$ = 7,1 MeV/nucleon.**

Solution

1- C'est une réaction de fusion car le noyau formé est plus lord que les noyaux de départ.

2- L'énergie libérée par la réaction est définie par : $\Delta E = (m_{produits} - m_{réactifs}).c^2$.

Or : $E_l({}_{8}^{16}O) = [8.m_p + 8.m_n - m({}_{8}^{16}O)].c^2$

$E_l({}_{6}^{13}C) = [6.m_p + 7.m_n - m({}_{6}^{13}C)].c^2$

$E_l({}_{2}^{4}He) = [2.m_p + 2.m_n - m({}_{2}^{4}He)].c^2$

Ce qui conduit à:

$m({}_{8}^{16}O) = (8.m_p + 8.m_n)c^2 - E_l({}_{8}^{16}O)$

$m({}_{6}^{13}C) = (6.m_p + 7.m_n)c^2 - E_l({}_{6}^{13}C)$

$m({}_{2}^{4}He) = (2.m_p + 2.m_n)c^2 - E_l({}_{2}^{4}He)$

soit:

$\Delta E = -\ E_l({}_{8}^{16}O) + E_l({}_{6}^{13}C) + E_l({}_{2}^{4}He)$

A.N :

$\Delta E = -\ 16.8{,}0 + 13.7{,}6 + 4.7{,}1$

$= -0{,}8\ MeV.$

Exercice résolu 7

La transformation de 1g d'hydrogène en hélium 4 selon la réaction:
$4({}_1^1H) \rightarrow {}_2^4He + 2({}_1^0e)$ s'accompagne de la libération de $4{,}1.10^{32}$ eV.

1- Exprimer l'énergie libérée en joule (J) puis en kilowattheures (kWh).
2- Calculer l'énergie libérée par la réaction : résultats en MeV.

Données : $N_A = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1}.

Solution

1- L'énergie libérée est :
$E = 4{,}41\ .10^{32}.1{,}6.10^{-19} = 6{,}6.10^{13}$J
Sachant que 1 kWh = 3 600 J, on a : $E = 6{,}6.10^{13}/3\ 600 = 1{,}8.10^{10}$ Wh ou $1{,}8.10^{7}$kWh.
2- La réaction fait intervenir 4 atomes d'hydrogène.
Soit :
$E' = \frac{E}{4.N_A} = \frac{4{,}1.1032}{4.6{,}02.10^{23}} = 1{,}7.10^{8}$ eV = 170 MeV.

EXERCICES

Exercice 1

1. Calculer l'énergie de liaison par nucléon du noyau d'hélium ($^{4}_{2}He$) de masse 4,0015u.

2. Mêmes questions avec l'uranium 238, $^{238}_{92}U$(masse d'un atome 238,05u)

Données : m_e = 0,511Mev.C^{-2} ; m_p = 938,28Mev.C^{-2} ; m_n = 939,57Mev.C^{-2} ; 1u = 931,5Mev.C^{-2}

On néglige l'énergie de liaison des électrons de l'atome.

Exercice 2

Les énergies de liaison par nucléon des divers nucléides suivants sont pour le deutérium ^{2}H : 1,11Mev, le tritium ^{3}H : 2,80Mev, l'hélium : ^{4}He : 7,07Mev

1. Calculer l'énergie libérée en cours de la réaction nucléaire suivante :

$$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$$

2. Calculer, en joules, l'énergie libérée lors de la formation d'un gramme d'hélium.

Exercice 3

Soit le nucléide du xénon : $^{129}_{54}Xe$

1. Donner la signification des nombres 54 et 129. En déduire la composition du noyau correspondant.
2. Calculer l'énergie de liaison du noyau et l'énergie de liaison par nucléon.

Données : Masse du proton : m_p = 1,00728 u ; masse du neutron : m_n = 1,00866 u ; masse atomique du xénon : M_{Xe} = 128,9048u ; Masse d'un électron me = 5,5.10^{-4}u ; 1u = 931Mev.C^{-2}

3. Quelle est l'énergie ΔE, exprimée en joules, qui sera libérée lors de la formation d'une mole de noyaux de xénon à partir de nucléons pris séparément. (Nombre d'Avogadro : N = 6,02.$10^{23}$$mol^{-1}$)

Exercice 4

Une série radioactive commence par $^{238}_{92}U$ et se termine par $^{206}_{82}Pb$

Chaque étape indique la perte d'une particule α ou la perte d'une particule β^-. Combien de particules α et β^- ont été perdues ?

Exercice 5

Marie Curie a isolé 1mg de radium 226 en 1912. Quelle masse restera – t – il en l'an 2009 ?

On donne période radioactive du radium 226 : T = 1620 ans.

Exercice 6

Le strontium ^{90}Sr a une période radioactive de 29 ans.

1. Calculer sa constante radioactive.
2. Calculer l'activité radioactive de 10mg de Sr à l'instant t = 0s, puis aux instants t = 58ans et t = 87ans.
3. Quelle fraction d'un échantillon restera – t – il au bout de 50ans ?

Exercice 7

Déterminer la période radioactive de l'astate $^{211}_{85}At$. Sachant qu'il y a émission de $2{,}7.10^{15}$ particules α lors de la première heure de désintégration d'un échantillon d'astate de masse m = 10^{-5}g

Donnée : masse molaire atomique de l'astate : 211g.mol^{-1}

Exercice 8

Une substance radioactive dont la demi – vie est de 10s émet 2.10^{7} particules α à la seconde.

1. Calculer la constante de désintégration de la substance.
2. Quelle est l'activité de la substance ?
3. Initialement, combien y a – t – il de noyaux radioactifs dans la substance ?
4. Déterminer le nombre de noyaux présents au bout de 30s. Quelle sera alors l'activité de cette substance à cet instant ?

Exercice 9

L'isotope du potassium $^{40}_{19}$K est un radioélément émetteur β^{+}.

1. Donner la nature et les propriétés du rayonnement β^{+} ?
2. Sachant qu'il se transforme en argon Ar stable, écrire l'équation de désintégration du noyau de potassium 40.
3. 3.1 Définir la période radioactive T

   3.2 Montrer que le nombre N de noyaux de potassium 40, à l'instant t, peut s'écrire : $N = N_0. 2^{-\frac{t}{T}}$ avec N_o est le nombre de noyaux à t = 0.

4. On se propose d'utiliser le potassium 40contenu dans une roche pour déterminer son âge. En effet, tant que la roche est liquide, l'argon formé par radioactivité s'échappe de cette roche. Lorsque la roche se solidifie, l'argon gazeux reste enfermé dans la roche. Il est alors possible de mesurer r défini par :

$$r = \frac{nombre\ de\ noyaux\ d'argon}{nombre\ de\ noyaux\ de\ potassium\ 40}$$

Écrire r en fonction de T et de t et calculer t sachant que r = 7.10^{-4} ; T = $1{,}3.10^{9}$ans.

Exercice 10

Dans un état excité, le technétium 99, $^{99}_{43}$Tc* est un isotope de période radioactive T = 6h, qui n'émet que des rayonnements γ

1. Pour quelle raison cet isotope doit–il être fabriqué sur place ?
2. Pour fabriquer du technétium $^{99}_{43}$Tc*,on produit du molybdène 99, $^{99}_{42}$Mo, dans un réacteur nucléaire. Ce molybdène 99 se désintègre en technétium 99, $^{99}_{43}$Tc* avec une période radioactive T' = 66h.

Écrire l'équation -bilan de la désintégration du molybdène 99 en technétium 99, $^{99}_{43}$Tc*.

Au bout de combien de temps l'activité du molybdène a –t –elle diminué de 75% ?

Exercice 11

Le carbone 14, $^{14}_{6}$C, produit, dans la haute atmosphère, par des réactions nucléaires, est en proportion constante dans le carbone naturel atmosphérique. Il est, comme son isotope $^{12}_{6}$C, assimilé par les organismes vivants. A la mort de ces derniers, il n'y a plus assimilation de carbone et la proportion de $^{14}_{6}$C diminue car il est radioactif émetteur β^{-}. Pour dater un échantillon, on détermine le nombre de carbone 14 encore présents et on le compare à celui trouvé dans l'organisme vivant correspondant.

1. Écrire l'équation de la désintégration.
2. Au bout de 5715 ans, la quantité de carbone 14 a diminué de moitié. La mesure de l'activité du carbone 14 contenu dans des fragments d'os anciens donne 110 désintégrations par heure et par gramme

de carbone naturel. Un fragment d'os actuel, de même masse, donne 880 désintégrations par heure et par gramme de carbone. Quel est l'âge des fragments d'os anciens ?
Données : $_3$Li, $_4$Be, $_5$B, $_6$C, $_7$N, $_8$O, $_9$F

Exercice 12

Un centrale nucléaire à réacteur à eau sous pression (REP) utilise comme matière fissile des pastilles de dioxyde d'uranium UO_2, contenant 96,5% d'uranium 238 et 3,5% d'uranium 235, $^{235}_{92}$U, conduit à la formation de césium137, $^{137}_{55}$Cs, de zirconium 97, $^{97}_{40}$Zr, de neutrons et d'électrons.

1. Écrire l'équation –bilan de la réaction de fission de l'uranium 235.
2.
    2.1 Calculer, en Mev, l'énergie nucléaire libérée $E_{libérée}$ par la fission d'un atome d'uranium 235. On néglige la masse des électrons.
    2.2 En supposant que toutes les fissions sont équivalentes, du point de vue énergétique, à la réaction précédente, calculer l'énergie libérée $E'_{libérée}$ par 1g de UO_2 .
3. Le réacteur de la centrale a un rendement en puissance η = 33,3 %. Il délivre une puissance électrique Pél = 925MW. Calculer l'énergie thermique E_{th} fournie par jour. Quelle est sa consommation journalière en UO_2 ? Le réacteur comporte 90t de UO_2, quelle sera sa durée maximale de fonctionnement sachant qu'il fonctionne, en moyenne, à 70 % de sa capacité maximale ?

Données :

1u = $1,66.10^{-27}$ Kg 931,5 Mev / C^2, m(^{235}U) = 234,993 u , m(^{137}Cs) = 136,877 u , m(^{97}Zr) = 96,889 u ;

m_n = 1,009 u ; masses molaires atomiques moyennes : M(U) = 238g.mol-1 , M(O) = 16g.mol-1 ; Constante d'Avogadro,

N = 6,02.1023 mol^{-1} ; 1an = 365,5 jours ; pr définition, $\eta=\frac{\mathcal{P}_{el}}{\mathcal{P}_{th}}$ où $P_{él}$ est la puissance électrique libérée par la réaction et $\mathcal{P}_{th} = \frac{E_{th}}{\mathcal{T}}$ avec τ est la durée du fonctionnement du réacteur, Eth est l'énergie thermique consommée qui est égale à la valeur absolue de l'énergie libérée par le réacteur et Pth la puissance thermique consommée.

Exercice 13 (Bacc C 2009)

Le noyau d'américanium $^{241}_{95}Am$ Est radioactif émetteur α, de période ou demi-vie radioactive T = 433 ans.
1) Définir la demi-vie radioactive puis calculer la constante radioactive d'américanium en S^{-1}.
2) A l'instant t=0, un échantillon a une activité $A_0=12.10^{10}$Bq de ce nucléide.
   a – Calculer la masse initiale m_0 d'américanium utilisé.
   b – Au bout de combien de temps t_1, 99% de cette masse aura été désintégrée.
   Calculer t_1.

On donne : 1an = 365jours ; Nombre d'Avogadro : N = 6,02. 1023 mol-1 ; $ln10 = 2,3$; $ln2 = 0,693$

La masse atomique molaire d'américanium : M(Am) = 241g.mol^{-1}.

Exercice 14 (Bacc D 2009)

L'isotope 210 du polonium Po (Z=84) est radioactif du type α.

1- Ecrire l'équation de désintégration produite en précisant les lois utilisées.
2- La période du polonium $^{210}_{84}Po$ est T = 138 jours. A l'instant t = 0, on considère un échantillon de masse $m_0 = 42g$ de polonium 210.
a- Calculer l'activité A_0 à l'instant t = A0 du $^{210}_{84}Po$ de cet échantillon.
b- A l'instant t_1, l'activité sera $A_1 = \frac{A_0}{10}$. Calculer t_1.
Voici un extrait du tableau périodique des éléments :

$_{81}$Ti	$_{82}$Pb	$_{83}Bi$	$_{84}Po$	$_{85}At$	$_{86}Ra$	$_{87}Fr$

1 Chimie organique

Rappels

La chimie organique a pour but l'étude des composés du carbone.

1- Les composés organiques

L'analyse élémentaire montre que les composés organiques sont constitués à partir d'un nombre limité d'éléments. Par ordre d'importance décroissante, ce sont : **C** (toujours), **H**, **O**, **N**, les halogènes (**Cl**, **Br**), **S**, **P**, **Fe**, **Mg**…

L'importance d'un élément dans un composé organique est exprimée par sa **composition centésimale**:

$$\%\ \acute{e}l\acute{e}ment = \frac{masse\ de\ l'\acute{e}l\acute{e}ment}{masse\ du\ compos\acute{e}}$$

Exemple

Soit un composé de formule brute $C_xH_yO_z$, de masse molaire M

$$\%C = \frac{m_C}{m} = \frac{12x}{M} \qquad \%H = \frac{m_H}{m} = \frac{y}{M} \qquad \%O = \frac{m_O}{m} = \frac{16z}{M}$$

Avec M=12x + y + 16z ou M=29.d (d : densité par rapport à l'aire pour un gaz)

2- Combustion complète

La combustion complète d'un composé organique de formule brute avec le dioxygène conduit toujours à la formation de dioxyde de carbone CO_2 et de l'eauH_2O.

Exemples

$2\,C_2H_6 \quad + \quad 7O_2 \quad \rightarrow \quad 4CO_2 \quad + \quad 6H_2O$

$C_4H_{10}O \quad + \quad 6O_2 \quad \rightarrow \quad 4CO_2 \quad + \quad 5\,H_2O$

3- Liaison covalente – Valence

- Dans une molécule, les liaisons entre atomes sont pratiquement covalentes.
  Une **liaison covalente** est une mise en commun d'une paire ou doublet d'électrons entre deux atomes. Elle est représentée par un tiret (−).
- La **valence** d'un élément est le nombre d'électrons célibataires de cet élément.

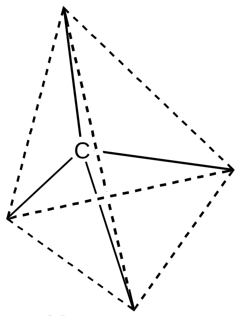
  Exemple

Elément	C	H	O	N	Cl	S
Groupe	4	1	6	5	7	6
Représentation de Lewis	$\cdot\dot{\underset{\cdot}{C}}\cdot$	$H\cdot$	$\cdot\overline{\underline{O}}\cdot$	$\cdot\underset{\cdot}{\overline{N}}\cdot$	$\lvert\overline{\underline{Cl}}\cdot$	$\cdot\overline{\underline{S}}\cdot$
Valence=nombre d'électrons célibataires.	4	1	2	3	1	2

4- Structure géométrique de l'atome de carbone

Un atome de carbone est **tétragonal, trigonal, digonal** selon qu'il est relié à 4, 3 ou 2 atomes voisins.

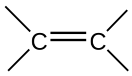
Structure tétraédrique



méthane
molécule tétraédrique
carbone tétravalent
carbone **tétragonal**

Si l'atome de carbone échange quatre liaisons covalentes simples avec quatre atomes, le carbone se trouve au centre d'un tétraèdre régulier : les liaisons sont dirigées vers les sommets de ce tétraèdre et font entre elles un angle de 109°.

Structure plane



éthène (éthylène)
molécule plane
carbone tétravalent
carbone **trigonal**

Lorsqu'un atome de carbone échange une liaison double et deux liaisons simples avec trois atomes, les axes de ces liaisons sont dans un même plan et font entre elles un angle voisin de 120°.

Structure linéaire

—C≡C—

éthyne (acétylène)
molécule linéaire
carbone tétravalent
carbone **digonal**

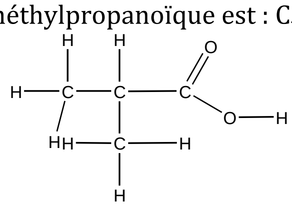
Lorsqu'un atome de carbone échange deux liaisons doubles, ou une liaison triple et une liaison simple avec deux atomes, les axes de ces liaisons sont alignés.
Exemple : O = C = O

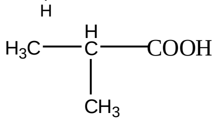
5- Formule brute-Formule développée-Formule semi-développée

- La formule brute indique la nature et le nombre d'atomes présents dans une molécule.
- La formule développée rend compte des liaisons entre les atomes en respectant la valence de chaque élément.
- Dans une formule semi-développée, on ne représente pas les liaisons avec les atomes d'hydrogène et oxygène.

Exemples:

La formule brute de l'acide 2-méthylpropanoïque est : $C_4H_8O_2$.

Sa formule développée est : 

Sa formule semi-développée est : 

6- Nomenclature

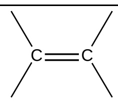
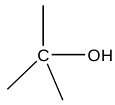
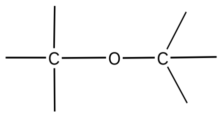
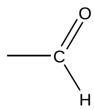
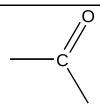
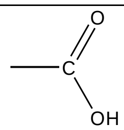
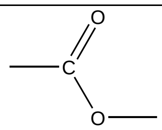
Le nom d'un composé organique se compose d'au moins **deux parties** :

a- Un préfixe indiquant le **nombre d'atomes de carbone de la chaîne carbonée la plus longue** :

n(C)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
préfixe	méth	éth	prop	but	pent	hex	hept	oct	non	déc

On compte le nombre d'atomes de carbone de la chaîne principale.

b- Un suffixe indiquant la **nature du corps** :

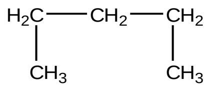
Fonction	Suffixe	Carbone fonctionnel	Formules brutes
Alcane	**-ane**		C_nH_{2n+2}
Alcène	**-ène**		C_nH_{2n}
Alcyne	**-yne**	$-C \equiv C-$	C_nH_{2n-2}
Composés oxygénés: **Alcan**(e) + **n° du C fonctionnel** + **suffixe**			
Alcool	**-ol**		$C_nH_{2n+2}O$
Ether-oxyde			
Aldéhyde	**-al**		$C_nH_{2n}O$
Cétone	**-one**		$C_nH_{2n}O$
Acide carboxylique	**-oïque** (précédé du terme « acide »)		$C_nH_{2n}O_2$
Ester	**-oate+nom du groupe alkyle lié à l'oxygène**		$C_nH_{2n}O_2$

Pour préciser la position du groupe fonctionnel : on numérote les atomes de carbone de la chaîne principale de façon que le numéro du carbone porteur soit le plus faible possible. (On omet l'indice 1)

Exemple 1 : composés organiques à chaîne linéaire

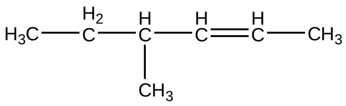
CH_3-CH=CH-CH_3 but-2-ène

HO-CH_2-CH_2-CH_3 propan-1-ol et non pas propan-3-ol

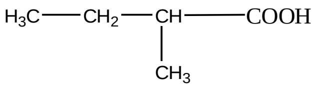


pentane

Exemple 2 : composés organiques à chaîne ramifiée



4- méthylhex-2-ène



Acide 2- methylbutanoïque

Substituant	Cl	Br	NH_2	NO_2	C_nH_{2n+1}-
Préfixe	Chloro	Bromo	Amino	Nitro	Alkyl-

Chapitre 1 : Stéréochimie

La **stéréochimie** étudie la disposition spatiale relative des atomes au sein d'une molécule.

1- Isomères de constitution

1-1- Définition

Les isomères de constitution sont des molécules organiques ayant la même formule brute, mais de **formules planes** (formules développées ou semi-développées) **différentes**.

1-2- Types d'isomères de constitution

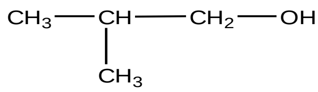
a- <u>Les isomères de chaîne</u>

Les **isomères de chaîne** diffèrent par la longueur des chaînes carbonées.

<u>Exemple:</u> Pour $C_4H_{10}O$

butan-1-ol

et



méthylpropan-1-ol

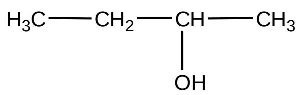
b- <u>Les isomères de position</u>

Les **isomères de position** ont un groupe caractéristique ou une liaison multiple qui occupe des positions différentes.

<u>Exemple:</u> Pour C_4H_{10}

butan-1-ol

et

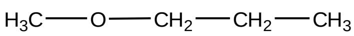


butan-2-ol

c- <u>Les isomères de fonction</u>

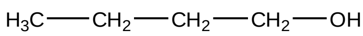
Les isomères de fonction se distinguent par des groupes caractéristiques différents.

<u>Exemple:</u> Pour $C_4H_{10}O$



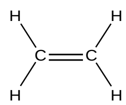
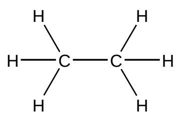
1-méthoxypropane
(étheroxyde R-O-R')

et



butan-1-ol
(alcool R-OH)

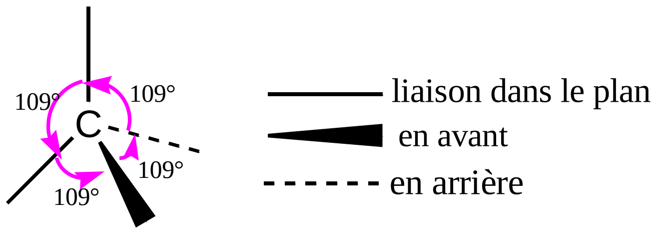
1-3- Conclusions

- Les formules développées ou semi-développées ne permettent pas distinguer une molécule plane de celle qui ne l'est pas.
  Exemple : La molécule d'éthylène de formule développée  est plane tandis que la molécule d'éthane de formule développée  ne l'est pas.
- Une molécule **non plane** contient **au moins un atome de carbone tétragonal.**

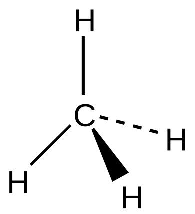
2- Représentation en perspective – Représentation de Newman

2-1- Représentation en perspective

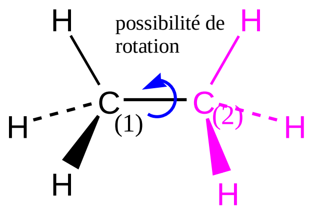
La représentation en perspective consiste à représenter dans l'espace les quatre liaisons simples pour chaque **atome de carbone tétragonal** en utilisant la représentation conventionnelle suivante :



<u>**Exemples :**</u>



représentation en perspective
de la molécule de méthane CH_4



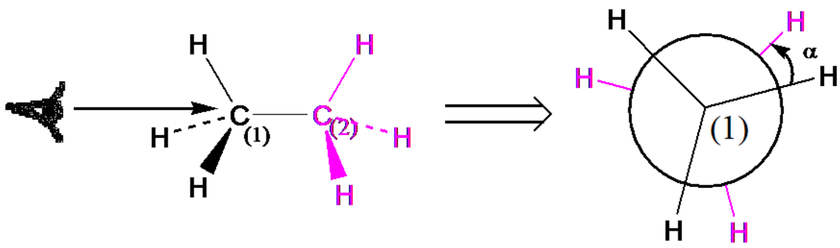
représentation en perspective
de la molécule d'éthane C_2H_6

2-2- Représentation de Newman

La représentation de Newman consiste à une mise à plat de ce que voit l'observateur regardant le long de l'axe C-C (ou le long de l'axe contenant une liaison simple).

Exemple :

Dans la représentation de Newman de la molécule d'éthane, l'atome de carbone n° 1 éclipse l'atome de carbone n°2.



représentation de Newmann
avec α de valeur quelconque

<u>**Remarque :**</u> A chaque valeur de α, variant de 0° à 360°, par rotation autour de l'axe $C_{(1)}$ – $C_{(2)}$, correspond à une forme dans l'espace appelée <u>**conformation**</u>.

3- Stéréoisomères

Les stéréoisomères ont la même constitution, mais des structures spatiales différentes.
Ils sont obtenus en utilisant la **représentation en perspective** ou la **représentation de Newman.**

On distingue les stéréoisomères de conformation et les stéréoisomères de configuration.

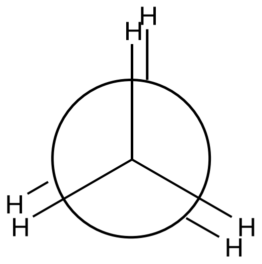
3-1- Stéréoisomères de conformation (ou conformères)

Les deux conformations particulières d'une molécule organique sont :

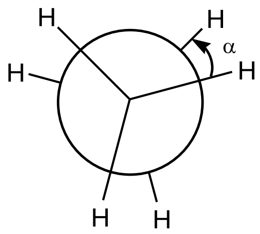
- la conformation éclipsée (α = 0°,120° ou 240°), moins stable

la conformation décalée (α = 60°, 180° ou 300°), plus stable.

Exemple : les conformations particulières de la molécule d'éthane C_2H_6:



conformation éclipsée



conformation étoilée ou décalée

Ces deux conformations particulières de l'éthane représentent les deux **stéréoisomères de conformation** (ou **conformères)** de la molécule d'éthane. Elles sont identiques.

Retenons:

- **On parle de conformation lorsque le passage d'un stéréoisomère à un autre stéréoisomère se fait *par rotation autour* d'une liaison simple C-C. .**
- **Les stéréoisomères de conformation représentent des molécules identiques donc ils ne sont pas séparables.**

3-2- Stéréoisomères de configuration

On parle de configuration lorsque le passage d'un stéréoisomère à un autre stéréoisomère nécessite la rupture de deux liaisons simples portées par le même atome de carbone.

Deux stéréoisomères de configuration ne sont pas superposables quelles que soient les rotations effectuées autour de liaisons simples carbone-carbone.

Ils sont séparables et isolables car leurs propriétés chimiques et physiques sont différentes.

a- Configurations liées à une liaison double.

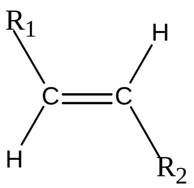
La liaison double bloque la possibilité de rotation autour de l'axe C-C.

- **Configurations *Z et E***

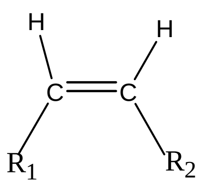
Si chaque carbone de la liaison C=C possède des groupements différents (cas des molécules de type R-CH=CH-R') , il existe deux configurations possibles : Z et E.

E : les groupements sont opposés

Z : les groupements sont du même côté



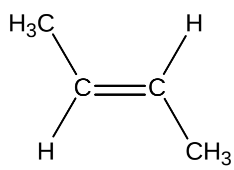
configuration (E)



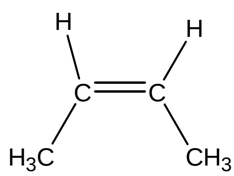
configuration (Z)

R_1 et R_2 sont des atomes ou groupes d'atomes autres que l'hydrogène, ils peuvent être identiques.

- **Exemple :** configurations Z et E du but-2-ène



configuration (E)



configuration (Z)

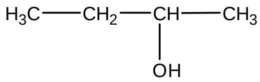
Ces deux molécules correspondent à deux stéréoisomères de configuration de la molécule de but-2-ène. Ce sont deux **diastéréoisomères**.

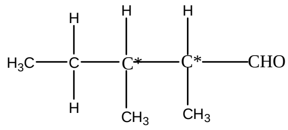
b- Configurations liées à un atome de carbone asymétrique

- **Carbone asymétrique**

Un atome de carbone asymétrique, noté C*, est un atome de carbone tétraédrique lié à quatre substituants différents.

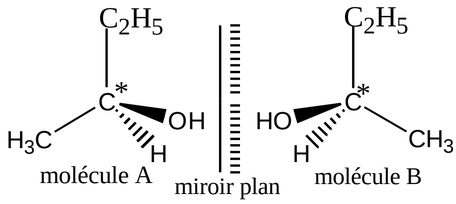
Exemples :

- la molécule de butan-2-ol  renferme un atome C*.

- la molécule de 2,3- diméthylpentanal  présente deux atomes C*.

- **Molécule chirale**

La molécule A non superposable à son image dans un miroir plan (molécule B) est dite **chirale** et inversement (figure ci-contre).
La chiralité d'une molécule est due à l'existence d'un atome de carbone asymétrique.



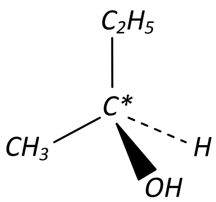
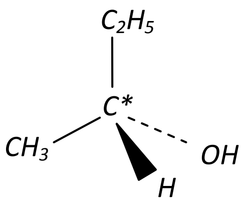
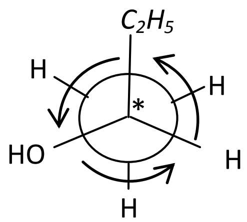
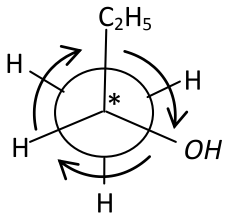
- **Couple d'énantiomères**

- Une molécule chirale peut se présenter sous deux énantiomères.

Deux énantiomères sont deux molécules images l'une de l'autre dans un miroir plan et non superposables.

- Les molécules A et B, deux stéréoisomères de configuration constituent un **couple d'énantiomères.**

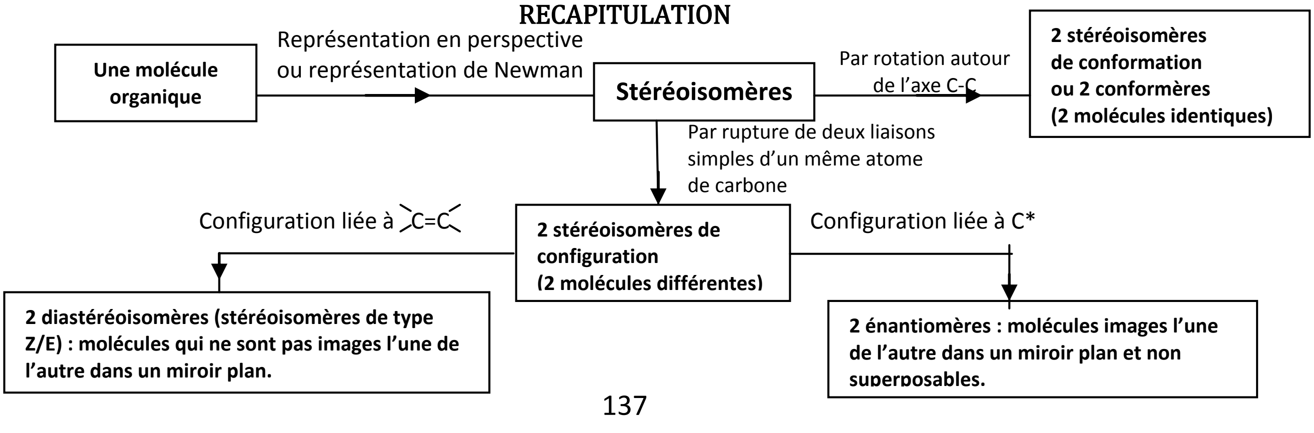
Exemple : Représentation en perspective et représentation de Newman des deux stéréoisomères de configuration **du** butan-2ol

Représentation en perspective		Représentation de Newman	
			

Remarques :

- L'atome C* appartient toujours à l'axe d'observation.
- Si les sens de la séquence choisie (ici OH→ $H \rightarrow C_2H_5$) sont différents pour les deux molécules étudiées, on a deux énantiomères.
  Dans le cas où les sens de la séquence choisie (OH→ $H \rightarrow C_2H_5$) sont les mêmes pour les deux molécules étudiées, on a deux conformères.
- Deux stéréoisomères de configuration sont individuellement isolables et ne sont pas superposables quelles que soient les rotations effectuées autour de liaisons simples.

RECAPITULATION

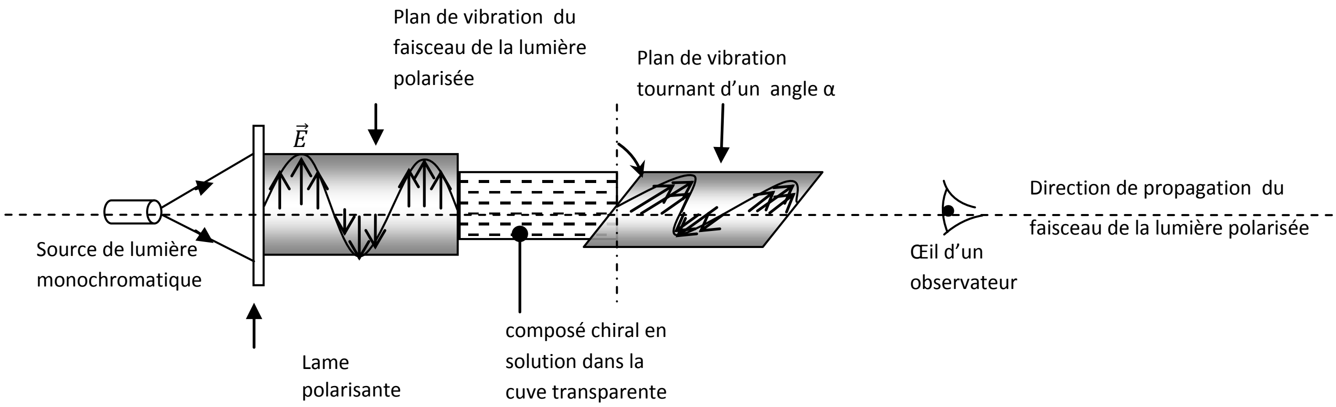


4- Activités optiques

4-1- Lumière polarisée – Plan de vibration

- La lumière naturelle constituée d'un champ magnétique $\vec{B}$ et d'un champ électrique $\vec{E}$ avec $\vec{B} \perp \vec{E}$ se propage dans toutes les directions. Elle est polychromatique, c'est-à-dire, formée de plusieurs couleurs.
- Une lumière monochromatique qui vient de traverser une lame polarisante ou polaroïd devient **polarisée.**
- Dans un faisceau de lumière polarisée, $\vec{E}$ a une direction bien déterminée. Le plan parallèle à la direction de $\vec{E}$ est appelé **plan de vibration.**
- Une substance chirale provoque une rotation du plan de vibration d'une lumière polarisée qui vient de la traverser : on dit que la substance chirale est douée d'une **activité optique** ou d'un pouvoir rotatoire (α).

4-2- Composé dextrogyre (D) – Composé lévogyre (L)



Deux énantiomères ont des activités optiques opposées :

- l'un fait tourner le plan de vibration vers la droite d'un observateur regardant vers la source. Il constitue le composé dextrogyre, noté(+),
- l'autre fait tourner le plan de vibration vers la gauche de l'observateur. Il constitue le composé lévogyre, noté (-).

Exemple : Le saccharose peut être un composé dextrogyre ou lévogyre selon le type des molécules chirales qui constituent l'un des deux énantiomères dans le saccharose.

4-3- Mélange racémique

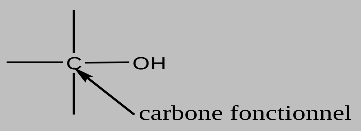
Un mélange racémique est un mélange en quantités égales de deux énantiomères (ou des molécules D et L). Il est sans action sur la lumière polarisée parce que la rotation du plan de vibration imposée par le composé dextrogyre annule exactement celle que crée le composé lévogyre.

Alcools

1- Généralités sur les alcools

1-1- Définitions

On appelle **alcool**, de formule générale **R-OH**, tout composé organique possédant un groupe hydroxyle – OH lié à un atome de carbone tétraédrique appelé carbone fonctionnel.

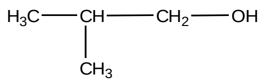
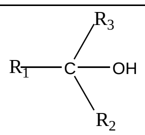
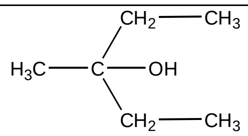


La formule brute d'un alcool saturé non cyclique est C_nH_{2n+1}-OH ou $C_nH_{2n+2}O$.

1-2- Les trois classes d'alcool

Il existe trois classes d'alcool :

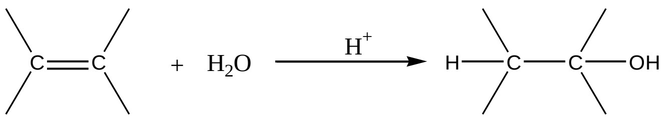
- Alcool primaire ;
- Alcool secondaire ;
- Alcool tertiaire.

Alcool	Carbone fonctionnel lié à	Formule générale	Exemples
Primaire	0 ou 1 groupe alkyle	R-CH_2OH (avec R = H ou C_nH_{2n+1}-)	CH_3OH, 
Secondaire	2 groupes alkyles	R_1-CHOH-R_2	CH_3 – CHOH – CH_3
Tertiaire	3 groupes alkyles		

2- Préparation des alcools

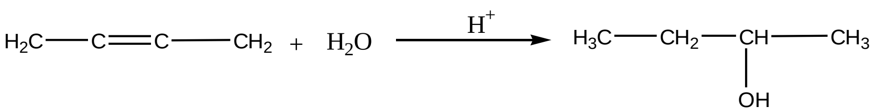
2-1- Hydratation des alcènes

L'hydratation des alcènes est une réaction d'addition entre un alcène et l'eau.



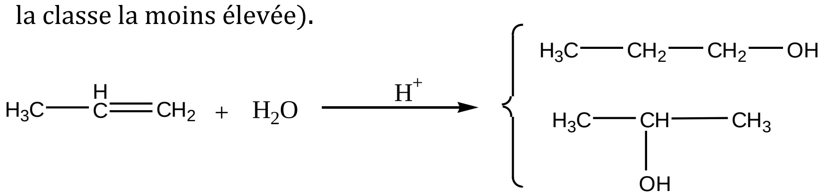
- L'hydratation d'un alcène symétrique conduit à un alcool unique.

<u>Exemple:</u>



- L'hydratation d'un alcène dissymétrique donne un mélange de deux alcools dont l'un est majoritaire (appartenant à la classe la plus élevée) et l'autre minoritaire (appartenant à la classe la moins élevée).

<u>Exemple :</u>

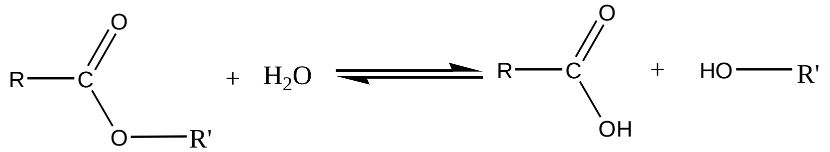


(ol I minoritaire)

(ol II majoritaire)

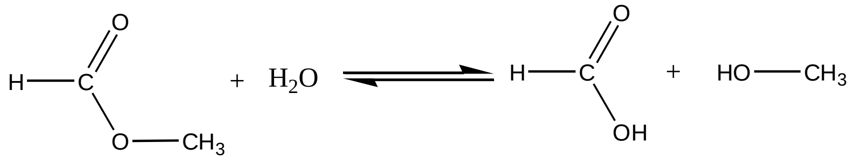
2-2- Hydrolyse de l'ester

a- L'hydrolyse de l'ester conduit à un alcool et à un acide carboxylique selon l'équation –bilan :



ester eau acide alcool

<u>Exemple :</u>

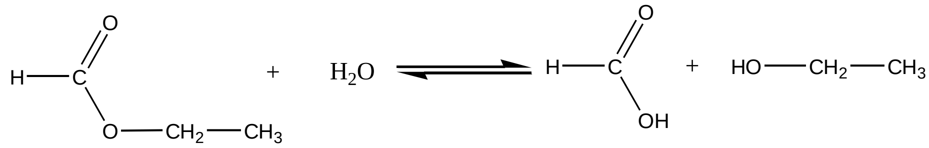


b- <u>Caractéristiques de l'hydrolyse de l'ester</u>

L'hydrolyse est une réaction chimique :

- **lente** (plusieurs jours pour s'effectuer) ;
- **athermique** (sans dégagement ni absorption de chaleur) ;
- **limitée conduisant à un équilibre chimique** caractérisé par la coexistence de quatre corps (alcool, acide, ester et eau) dans des proportions déterminées qui demeurent constantes au cours du temps.

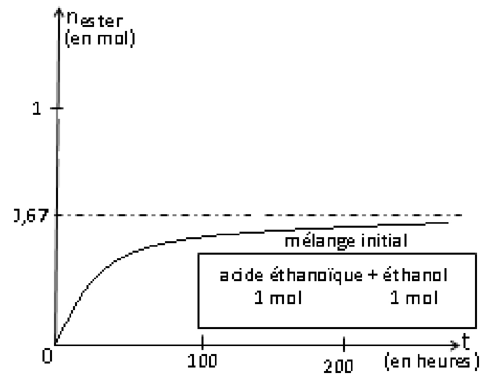
c- <u>Rendement r de l'hydrolyse de l'ester</u>



à t=0	1mol	1mol	0	0
équilibre	2/3mol	2/3mol	1/3mol	1/3mol

Son rendement, $r = \frac{\text{Quantité d'ester ou d'alcool formé}}{\text{Quantité initale d'ester}}$

A.N : $r = \frac{\frac{1}{3}}{1} = 0{,}33$ soit 33%

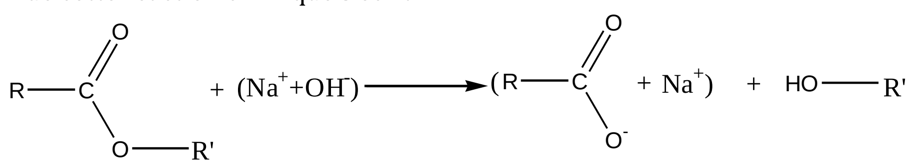


courbe d'hydrolyse

2-3- Saponification

L'hydrolyse d'un ester en milieu basique est appelée saponification.

L'équation-bilan de cette reaction chimique s'écrit:



Remarques :

- La température ou l'utilisation d'un catalyseur permettent d'accélérer la réaction,
- La réaction de l'ester $C_nH_2nO_2$ avec n≥4 permet d'obtenir du savon d'où le nom saponification,
- Le savon est récupéré par ajout d'eau salée à la fin de la réaction.

3- Réactions chimiques avec les alcools

3-1- Action du sodium sur les alcools

Cette réaction est immédiate et exothermique. C'est une réaction d'oxydoréduction selon l'équation – bilan :

$$C_nH_{2n+1}OH \quad + \quad Na \rightarrow \underbrace{(C_nH_{2n+1}O^- + Na^+)}_{\substack{\text{alcanolate de sodium} \\ \text{dans l'alcool}}} \quad + \quad \frac{1}{2}H_2$$

Exemple: $$CH_3 - CH_2OH + Na \rightarrow \underbrace{(CH_3 - CH_2O^- + Na^+)}_{\substack{\text{éthanolate de sodium} \\ \text{dans l'éthanol}}} \quad + \quad \frac{1}{2}H_2$$

Remarques :

- Si l'alcool est en défaut, on obtient un précipité d'éthanoate de sodium $CH_3 - CH_2ONa$.
- Les ions alcoolates $C_nH_{2n+1}O^-$ sont des bases fortes.

3-2- Réaction de déshydratation (élimination d'eau)

La déshydratation d'un alcool peut donner, selon la température, un alcène ou un étheroxyde :

a- un alcène :

$$C_nH_{2n+1}OH_{(g)} \xrightarrow[t° : 300°C - 400°C]{Al_2O_3} \underbrace{C_nH_{2n}}_{alcène} + H_2O$$

La déshydratation de l'alcool est intramoléculaire.

Exemple:

$$\underbrace{CH_3 - CH_2OH_{(g)}}_{vapeur\ d'alcool\ éthylique} \xrightarrow[t° : 300°C]{Al_2O_3} CH_2 = CH_2 + H_2O$$

b- un étheroxyde :

$$2C_nH_{2n+1}OH \xrightarrow[t° <300°C]{Al_2O_3} \underbrace{C_nH_{2n+1} - O - C_nH_{2n+1}}_{étheroxyde} + H_2O$$

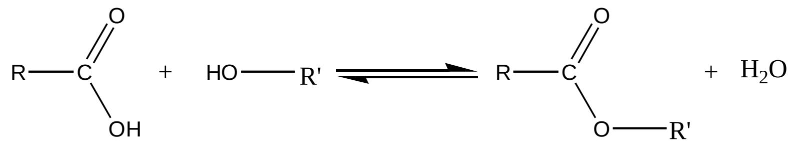
La déshydratation de l'alcool est intermoléculaire.

Exemple :

$$CH_3 - CH_2 - OH + HO - CH_2 - CH_3 \xrightarrow[t° =200°C]{Al_2O_3} \underbrace{CH_3 - CH_2 - O - CH_2 - CH_3}_{éthoxyéthane} + H_2O$$

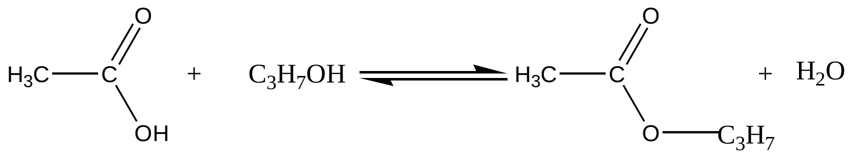
3-3- Estérification

a- L'estérification est une réaction chimique d'équation-bilan :



acide carboxylique alcool ester eau

Exemple :



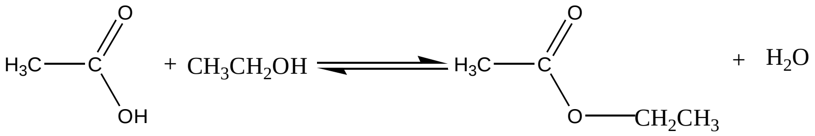
b- Caractéristiques de l'estérification

L'estérification est une réaction chimique :

- **lente** (plusieurs jours pour s'effectuer) ;
- **athermique** (sans dégagement ni absorption de chaleur) ;
- **limitée conduisant à un équilibre chimique** caractérisé par la coexistence de quatre corps (alcool, acide, ester et eau) dans des proportions déterminées qui demeurent constantes au cours du temps.

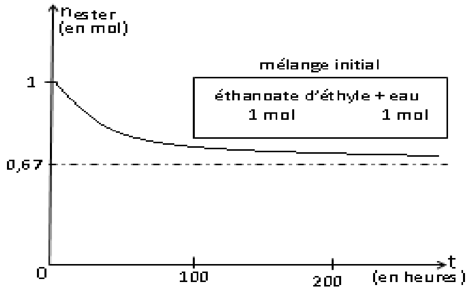
c- Rendement r de l'estérification

Prenons l'exemple d'un mélange équimolaire d'acide éthanoïque et d'éthanol.



t=0	1mol	1mol	0	0
équilibre	1/3mol	1/3mol	2/3mol	2/3mol

Par définition, $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{Quantité\ d'ester formé}\ (\boldsymbol{n_{est}^{f}})}{\boldsymbol{Quantité\ d'ester\ si\ la\ réaction\ est\ totale}}$



courbe d'estérification

A.N : $r = \frac{\frac{2}{3}}{1} = 0{,}67$ soit 67%

Remarque : si $n_{ol}^{0} < n_{ac}^{0}$ alors $r = \frac{n_{est}^{f}}{n_{ol}^{0}}$

ou si $n_{ol}^{0} > n_{ac}^{0}$ alors $r = \frac{n_{est}^{f}}{n_{ac}^{0}}$

3-4- Oxydations d'un alcool

a- Oxydation totale

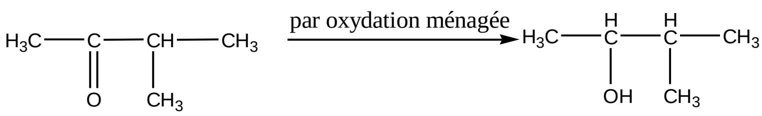
L'oxydation totale (ou combustion) d'un alcool conduit à la destruction de sa chaîne carbonée. Il se forme du dioxyde de carbone et de la vapeur d'eau selon l'équation bilan ;

$$C_nH_{2n+1}OH \quad + \quad \frac{3n}{2}\,O_2 \rightarrow nCO_2 + (n+1)\,H_2O$$

b- Oxydation ménagée

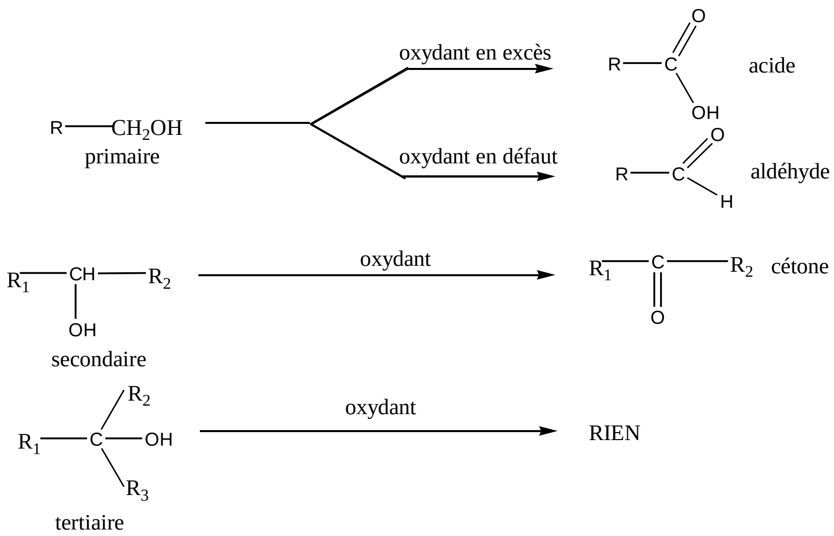
L'oxydation ménagée d'un alcool est une oxydation qui conserve la chaîne carbonée de ce réducteur et de son oxydant conjugué.

Exemple:



(réducteur) (oxydant conjugué)

Les produits d'oxydation ménagée d'un alcool sont :



Remarque : Si l'oxydant est en défaut, le produit d'oxydation obtenu est, en général, un mélange d'aldéhyde et d'acide carboxylique.

Les oxydants les plus utilisés pour réaliser l'oxydation ménagée sont :

- l'ion permanganate $MnO_4^- du couple (MnO_4^-/Mn^{2+}) en milieu acide$;
- l'ion dichromate $Cr_2O_7^{2-}$du$couple(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) en milieu acide$;
- le dioxygène de l'air O_2 du couple (O_2/ H_2O) en présence d'un catalyseur (oxydation catalytique).

Remarque : En l'absence de l'air, donc de dioxygène, la déshydrogénation catalytique donne :

$$alcool I \xrightarrow{Cu} aldéhyde$$

$$alcool II \xrightarrow{Cu} cétone$$

Les demi - équations électroniques définissant les couples oxydants-réducteurs mis en jeu sont :

$\underbrace{MnO_4^-}_{violet} / \underbrace{Mn^{2+}}_{incolore}$: $MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightleftarrows Mn^{2+} + 4H_2O$

$\underbrace{Cr_2O_7^{2-}}_{jaune\ orangé} / \underbrace{Cr^{3+}}_{vert}$: $Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e^- \rightleftarrows 2Cr^{3+} + 7H_2O$

R – CHO /$R - CH_2OH$: $R - CH_2OH \rightleftarrows$ R-CHO + $2H^+$ + $2e^-$

R – COOH /$R - CHO$: $R - CHO + H_2O \rightleftarrows$ R-COOH + $2H^+$ + $2e^-$

R – COOH /$R - CH_2OH$: $R - CH_2OH + H_2O \rightleftarrows$ R – COOH + $4H^+$ + $4e^-$

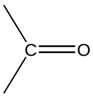
R_1 – CO – R_2 /$R_1 - CHOH - R_2$: $R_1 - CHOH - R_2 \rightleftarrows R_1$ – CO – R_2 + $2H^+ + 2e^-$

Retenons

L'**oxydation ménagée** permet de différentier les trois classes d'alcool.

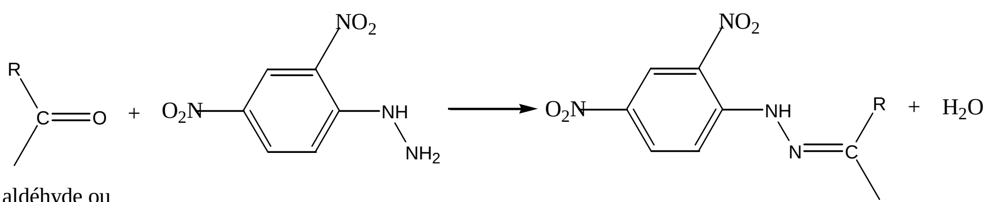
4- Caractérisation des aldéhydes et des cétones.

4-1- Propriétés communes : Test à la DNPH

La **2,4- dinitrophénylhydrazine (DNPH)**, réactif commun aux aldéhydes et aux cétones, met en évidence le groupe carbonyle 

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{aldéhyde (RCHO)}\\ \boldsymbol{ou}\\ \boldsymbol{cétone (R_1 - CO - R_2)}\end{array}\right. + \textbf{DNPH} \longrightarrow \textbf{précipité jaune}$$

Equation -bilan :



aldéhyde ou cétone

2,4-DNPH

2,4-dinitrophénylhydrazone

4-1- Propriétés réductrices des aldéhydes

a- ***Le réactif de Tollens ou nitrate d'argent ammoniacal*** (milieu basique), contenant l'ion diamine argent $Ag(NH_3)_2^+$ oxyde les aldéhydes en carboxylates $RCOO^-$ avec formation d'un dépôt d'argent (miroir d'argent).

Aldéhyde + réactif de Tollens → dépôt d'argent

Equation-bilan de la réaction :

Oxydation : $RCHO + 3OH^- \rightarrow RCOO^- + 2H_2O + 2e^-$

Réduction : $(Ag(NH_3)_2^+ + e^- \rightarrow$ Ag + $2NH_3)$ $x\ 2$

Equation-bilan : $\boldsymbol{2Ag(NH_3)_2^+ + RCHO + 3OH^- \rightarrow 2Ag + RCOO^- + 4NH_3 + 2H_2O}$

b- La liqueur de Felhing, solution contenant des ions Cu^{2+}(complexés) en milieu basique, oxyde les aldéhydes en carboxylate $RCOO^-$ avec formation d'un précipité rouge brique de d'oxyde de cuivreI (Cu_2O).

Liqueur de Fehling + Aldéhyde → précipité rouge brique

Equation - bilan de la réaction :

Oxydation : $RCHO \; + \; 3OH^- \; \rightarrow \; RCOO^- \; + \; 2H_2O \; + \; 2e^-$

Réduction : $2Cu^{2+} \; + \; 2OH^- + \; 2e^- \; \rightarrow \; Cu_2O \; + \; H_2O$

Equation-bilan : $\boldsymbol{2Cu^{2+} + RCHO + 5OH^- \rightarrow Cu_2O + RCOO^- + 3H_2O}$

c- <u>Le réactif de Schiff</u>, solution aqueuse de fuschine (colorant organique décoloré par le dioxyde de soufre à froid), prend une coloration rose en présence d'un aldéhyde.

Réactif de Schiff + aldéhyde → coloration ROSE

4-2- Conclusion

Test	Aldéhyde	Cétone
Oxydation ménagée	Acide carboxylique	rien
DNPH	Précipité jaune	Précipité jaune
Réactif de Schiff	Couleur ROSE	rien
Liqueur de Fehling	Précipité ROUGE BRIQUE	rien-
Réactif de Tollens	Miroir d'agent	-rien

<u>Exercice résolu 1</u>

a) Etablir, en utilisant les formules semi-développées, l'équation-bilan traduisant la réaction entre les ions permanganates en excès et le butan-1-ol en milieu acide.

b) Même question avec le butan 2 –ol mais en utilisant les formules.

Solution

Les couples rédox mis en jeu sont : $C_4H_8O_2/C_4H_{10}O$ puisqu'il s'agit d'un oxydant en excès et MnO_4^- / Mn^{2+} en milieu acide.

a) Établissement de l'équation-bilan en utilisant les formules brutes

Oxydation : $(CH_3-CH_2-CH_2-CH_2OH \; + \; H_2O \; \rightarrow \; CH_3-CH_2-CH_2-COOH \; + \; 4H^+ \; + \; 4e^-)$ x5

Réduction: $(MnO_4^- \; + \; 8H^+ \; + \; 5e^- \; \rightarrow \; Mn^{2+} \; + \; 4H_2O)$ x4

Equation-bilan :

$$\boldsymbol{5CH_3-CH_2-CH_2-CH_2OH \; + \; 4MnO_4^- \; + \; 12H^+ \rightarrow 5CH_3-CH_2-CH_2-COOH + 4Mn^{2+} \; + \; 11H_2O}$$

ou bien en ajoutant $12H_2O$ dans chaque membre pour faire apparaître les ions hydronium H_3O^+, on a :

$$5CH_3-CH_2-CH_2-CH_2OH \; + \; 4MnO_4^- \; + \; 12H_3O^+ \longrightarrow 5CH_3-CH_2-CH_2-COOH + 4Mn^{4+} \; + \; 23H_2O$$

b) Établissement de l'équation-bilan en utilisant les formules brutes

Oxydation : $(CH_3-CH_2-CHOH-CH_3 \; \rightarrow \; CH_3-CH_2-CO-CH_3 \; + \; 2H^+ \; + \; 2e^-)$ x5

Réduction: $(MnO_4^- \; + \; 8H^+ \; + \; 5e^- \; \rightarrow \; Mn^{2+} \; + \; 4H_2O)$ x2

Equation-bilan :

$$\boldsymbol{5CH_3-CH_2-CHOH-CH_3 + 2MnO_4^- \; + \; 6H^+ \rightarrow 5CH_3-CH_2-CO-CH_3 \; + \; 2Mn^{2+} \; + \; 8H_2O}$$

ou bien en ajoutant $6H_2O$ dans chaque membre pour faire apparaître les ions hydronium H_3O^+, on a :

$$\boldsymbol{5CH_3-CH_2-CHOH-CH_3 \; + \; 2MnO_4^- + \; 12H_3O^+ \longrightarrow 5CH_3-CH_2-CO-CH_3 + 2Mn^{2+} \; + \; 14H_2O}$$

<u>Exercice résolu 2</u>

Un monoalcool saturé et chirale A a une densité de vapeur d = 3,03.

1) L'oxydation ménagée de A par une solution acidifiée de dichromate de potassium conduit à un composé B qui ne réagit pas avec la 2,4 DNPH et sans action sur le réactif de Schiff.

a- Donner les formules semi-développées de A et de B, on nommera A et B.

b- L'alcool A est optiquement actif. Pourquoi ? On fera la représentation en perspective (ou spatiale) de deux énantiomères de ses molécules.

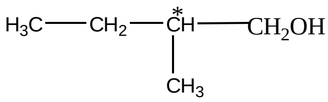
2) **On laisse réagir dans une étuve, un mélange de 0,2mol de B avec le 2-méthylbutan-1-ol. Au bout de quelques jours, on obtient 0,09mol de composé C et de l'eau.**
Écrire la réaction entre B et le 2-méthylbutan-1-ol, on nommera le composé C obtenu, puis calculer le pourcentage d'acide éstérifié.
On donne : M(C) = 12g.mol^{-1} ; M(O) = 16g.mol^{-1} ; M(H) = 1g.mol^{-1}.

Solution

1) A(chiral) :$C_nH_{2n+1}OH$; d = $\frac{M}{29}$ = 3,03

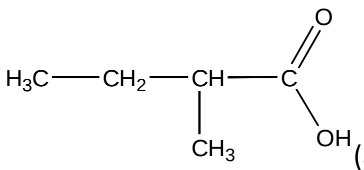
a- $M = 14n + 18 \;\rightarrow\; n = \frac{M-18}{14} = \frac{29d-18}{14} = \frac{29.(3{,}03)-18}{14}$ $soit\ n = 5$ et A: $C_5H_{11}OH$

Formule semi-développée de A :



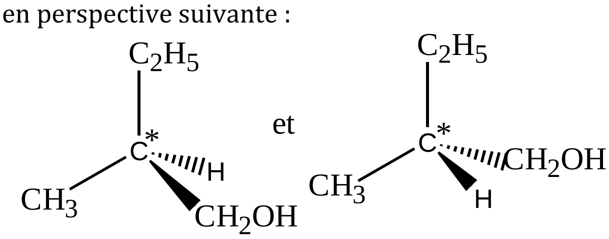
(2-méthylbutan-1-ol)

Le composé B qui ne réagit pas avec la DNPH et le réactif de Schiff, est le produit d'oxydation ménagée de l'alcool primaire A. Donc B, acide carboxylique de même squelette carboné que A, a pour formule semi-développée :

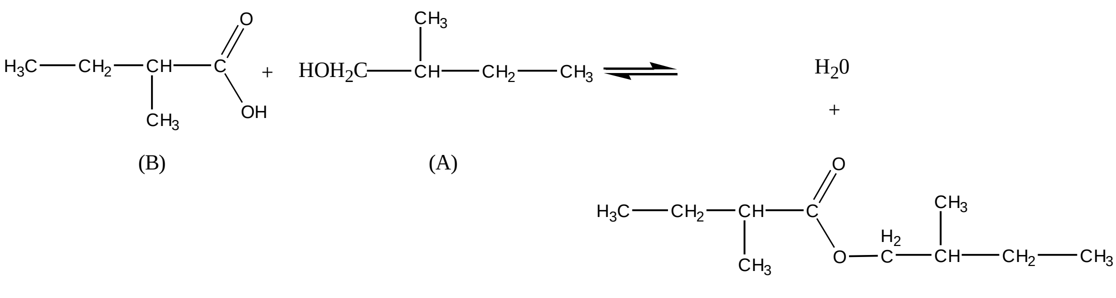


(acide 2-méthylbutanoïque)

b- L'alcool A est optiquement actif parce qu'il est constitué par des molécules contenant un atome de carbone asymétrique.
Chaque molécule chirale de A peut se présenter sous deux énantiomères ayant la représentation en perspective suivante :



L'équation bilan de la réaction entre les molécules B et A est :

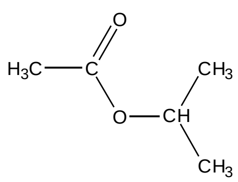


Le composé C est un ester. C'est le **2-méthylbutanoate de 2- méthylbuthyle.**
Le pourcentage d'acide estérifié est :

$r = \frac{n_{B\ estérifié}}{n_B^0} = \frac{n_C}{n_B^0} = \frac{0{,}09}{0{,}2} = 0{,}45$ soit **45%**

<u>Exercice résolu 3</u>

On considère un composé organique oxygéné A de formule semi-développée



1-

a- Nommer le composé A.

b- A quelle famille de composé organique appartient-il ?

c- Donner les autres isomères appartenant à la famille de A. Nommer les.

2- **Donner tous les isomères de fonction, avec leur nom, du composé organique oxygéné A.**

3- **Le composé organique A' qui est un isomère de fonction de A est constitué par des molécules chirales.**

Représenter :

a- **en perspective, deux stéréoisomères de configuration de la molécule de A' ;**

b- **en projection de Newman, deux stéréoisomères de conformation de la molécule de A'.**

Solution

1-

a- Le composé A est l'éthanoate de méthyléthyle.

b- Il appartient à la famille des esters.

c- Les autres isomères appartenant à la famille de A sont :

Isomères de chaîne :

$CH_3\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}COO\text{-}CH_3$ **(butanoate de méthyle)**

$CH_3-CH-COO-CH_3$
|
CH_3
(méthylpropanoate de méthyle)

$CH_3-CH_2-COO-CH_2-CH_3$ **(propanoate d'éthyle)**

$CH_3\text{-}COO-CH_2-CH_2-CH_3$ **(éthanoate de propyle)**

$HCOO-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$ **(méthanoate de butyle)**

CH_3
|
$HCOO-CH-CH_2-CH_3$ **(méthanoate de 1-méthylpropyle)**

CH_3
|
$HCOO-C-CH_3$
|
CH_3 **(méthanoate de diméthyléthyle)**

Isomère de position:

CH_3
|
$HCOO-CH_2-CH-CH_3$ **(méthanoate de 2-méthylpropyle)**

2- Tous les isomères de fonction de A appartenant à la famille des acides carboxyliques sont les suivants :

Isomères de chaîne : :

$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-COOH$
acide pentanoïque

$CH_3-CH_2-CH-COOH$
|
CH_3
acide 1-méthylbutanoïque

CH_3
|
$CH_3-C-COOH$
|
CH_3
acide diméthypropanoïque

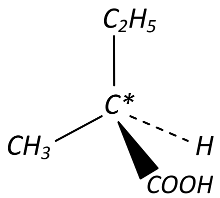
Isomère de position :

$CH_3-CH-CH_2-COOH$
|
CH_3

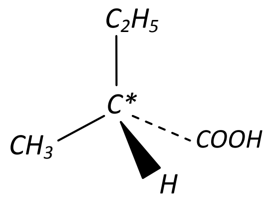
acide 1-méthylbutanoïque

3- A' : $CH_3-CH_2-C^{*}H-COOH$
|
CH_3

a- Représentation en perspective des deux stéréoisomères de configuration de la molécule de A'

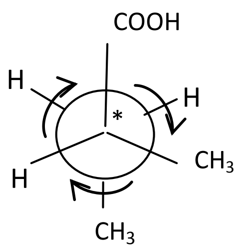


et

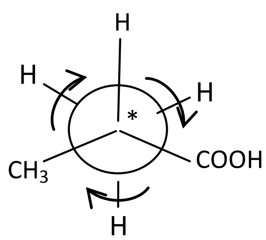


b- Représentation de Newman des deux stéréoisomères de conformation de la molécule de A'.

Suivant l'axe $C_3 - C_2^*$:



et



EXERCICES

Exercice 1

Un alcane a pour formule C_5H_{12}.

1) Ecrire les formules semi-développées de tous les isomères de constitution répondant à cette formule brute. Donner leurs noms.

2) Un seul d'entre eux, soumis à une réaction de monochloration, conduit à un dérivé monochloré unique.

   2.1 Quel est l'alcane mis en jeu ?

   2.2 Ecrire la formule semi-développée du dérivé monochloré obtenu ? Quel est son nom ?

Exercice 2

Donner les formules semi-développées des composés suivants :

- 2-méthyl propanal
- 2,4-diméthyl pentanal
- 3- méthyl hexan-3-one
- 2-éthyl pentan-2-ol
- acide 2,3-diméthyl butanoïque
- acide 2-méthyl pentanoïque
- éthanoate d'éthyle
- méthanoate de 3-méthyl butyle

Exercice 3

On considère les corps purs organiques de formules semi-dévelopées respectives :

$CH_3-\underset{OH}{\underset{|}{CH}}-(CH_2)_2-CH_3$ A

$CH_3-(CH_2)_2-CHO$ B

$CH_3-(CH_2)_2-COOH$ D

1) Donner les noms de A, B, D

2) A'est un isomère de position de A

   B'est un isomère de fonction de B

   D'est un isomère de chaîne de D

Écrire les formules semi-développées de A', B', D' et les nommer.

Exercice 4

On rappelle que le groupe fonctionnel $-\overset{|}{\underset{|}{C}}-OH$ est propre aux alcools, que l'enchaînement $-\overset{|}{\underset{|}{C}}-O-\overset{|}{\underset{|}{C}}-$ caractérise les éthers oxydes.

1) Donner les noms des composés suivants :

a) CH_3-CH_2-CH_2OH; b) CH_3-CHOH-CH_3; c) CH_3-O-CH_3; d) CH_3-O-CH_2-CH_3; e) C_2H_5-O-C_2H_5

2) Écrire les formules semi-développées de tous les alcools de formule brute $C_4H_{10}O$ et les nommer.

3) Même questions pour les éthers oxydes de formule brute $C_4H_{10}O$.

Exercice 5

Écrire les formules semi-développées des isomères de constitution correspondant aux formules brutes suivantes :

1) C_5H_{12} ; 2) $C_5H_{11}Cl$ Donner les noms de tous les isomères.

Exercice 6

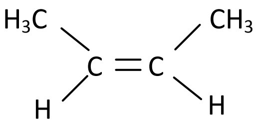
Donner les formules semi-développées des alcènes isomères admettant les formules brutes suivantes : C_4H_8 ; C_5H_{10}.

Quels sont ceux qui présentent une stéréoisomérie de type Z/E ?

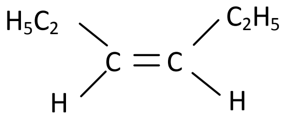
Donner les formules semi-développées des stéréoisomères.

Exercice 7

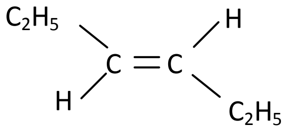
1) Donner les noms des composés A, B, D suivants en précisant s'il s'agit d'un stéréoisomère Z ou E.



A



B



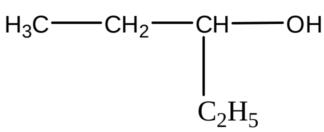
D

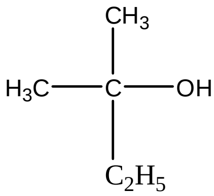
2) Essayer de classer, par stabilité croissante, les stéréoisomères B et D. Donner la raison de votre choix.

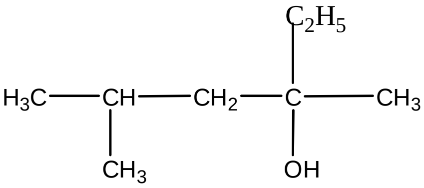
Exercice 8

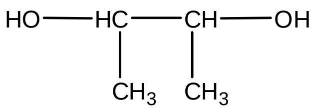
Nommer les composés suivants :

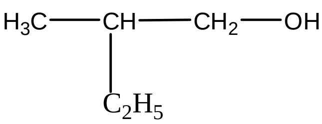
a- CH_3OH

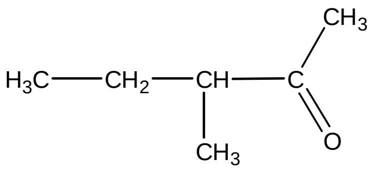
b- 

c- 

d- 

e- 

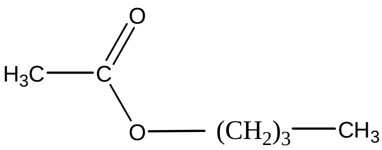
f- 

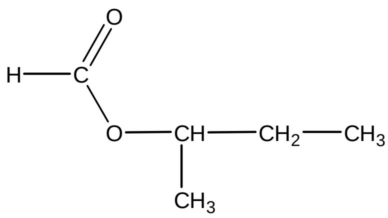
g- 

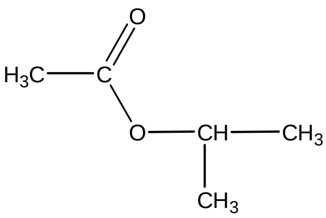
Indiquer le (ou les) carbones asymétrique(s)s'il y en a.

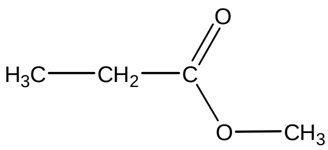
Exercice 9

Nommer les composés suivants :

a- 

b- 

c- 

d- 

Exercice 10

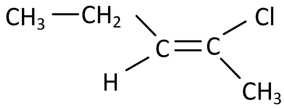
On considère la molécule de 3-méthyl pent-1-ène.

a) Écrire sa formule semi-développée.

b) Y a-t-il des stéréoisomères Z/E ? Si oui, les représenter.

__Exercice 11__

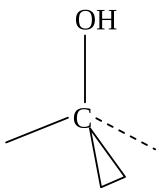
1) Donner le nom de la molécule A suivante :



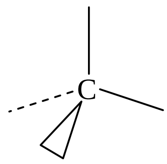
2) Cette molécule A est-elle chirale ?
3) On procède à l'hydrogénation catalytique du composé A. Écrire l'équation-bilan de la réaction chimique. Nommer le produit B obtenu.
4) La molécule B est-elle chirale ? Pourquoi ?
5) Dessiner la représentation en perspective et la représentation de Newman d

__Exercice 12__

L'addition d'eau sur le but-1-ène conduit à un mélange de deux alcools A et B.
1) Écrire la formule semi-développée de but-1-ène.
2) Écrire la formule semi-développée de chacun des alcools obtenus.
3) Les molécules de A et de B sont-elles chirales ?
4) Si l'une d'elles possède deux énantiomères, les représenter en complétant les deux schémas ci-contre.

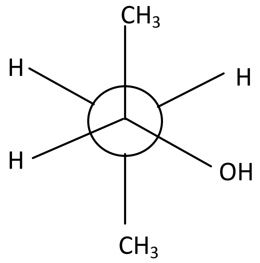


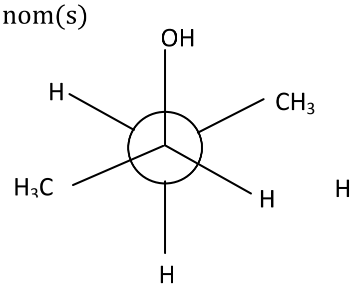
et



__Exercice 13__

Les deux schémas ci-dessous représentent-ils la même molécule ou bien des molécules différentes ? En donner la (ou les) formule(s) semi-développée(s) et le(s) nom(s)





S'agit-il de conformères ?

__Exercice 14__

On considère une molécule de chlorobutane.
a) Représenter les différents isomères. Les nommer.
b) Un de ces isomères possède un carbone asymétrique. Lequel ? Dessiner la représentation de Newman de cet isomère.

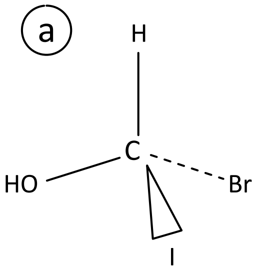
__Exercice 15__

1) Dessiner, selon les mêmes conditions que dans l'exercice précédent (projection suivant l'axe $C_{(2)}$ - $C_{(3)}$), les conformations étoilées du butane.
2) Classer les conformations par ordre de stabilité.

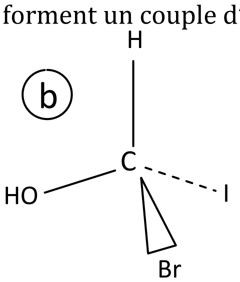
__Exercice 16__

Deux des molécules suivantes forment un couple d'énantiomères. Lesquels ?

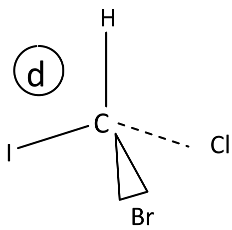
a



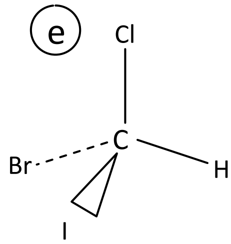
b



d

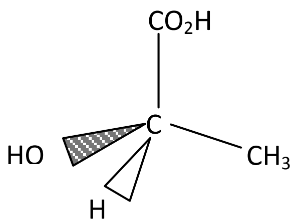


e



Exercice 17

1- Le (+) acide lactique est représenté ci-dessous:



Dessiner la représentation en perspective de son énantiomère en plaçant les liaisons C*- CO_2H et C*- OH dans le plan de la feuille.

2- Dans un litre d'une solution à 0,12mol.l^{-1} de (+) acide lactique, on dissout 9,0g de son énantiomère. La solution obtenue est-elle lévogyre, dextrogyre ou sans activité optique ?

Exercice 18

1) Quelle est la formule brute d'un aldéhyde ou d'une cétone dérivant d'un alcane à n atomes de carbone ?

2) L'analyse d'un composé pur A (aldéhyde ou cétone) fournit les pourcentages en masse suivants :

C : 69,77% ; H : 11,60%

Quelle est la formule brute de A ?
3) L'échantillon analysé a été obtenu en faisant passer, d'une part, les vapeurs d'un alcool B sur du cuivre à 300°C. On obtient, d'autre part, un acide carboxylique C lorsqu'on chauffe A avec un excès de permanganate de potassium en milieu sulfurique.
Donner les formules semi-développées et les noms des composés A, B, et C sachant que leurs chaînes carbonées contiennent trois groupes méthyle.
4) Écrire l'équation bilan de la réaction entre les corps A et les ions permanganate en milieu acide.

Exercice 19

On considère un mélange formé par tous les alcools dont la molécule contient 4 atomes de carbone. Ces alcools sont désignés par (a), (b), (c), (d).
1) Écrire toutes les formules semi-développées en indiquant le nom et la classe de chacun des alcools.
2) Par oxydation ménagée : (a) n'est pas transformé, (b) donne une cétone dont on indiquera la formule et le nom ; (c) et (d) donnent chacun, après formation d'un produit intermédiaire, un acide carboxylique. Identifier (a) et (b).
Trouver les noms et les produits intermédiaires et des acides formés par oxydation ménagée de (c) et de (d).

Exercice 20

L'hydratation d'un alcène conduit à un produit oxygéné A, renfermant en masse 26,7% d'oxygène.
1) A quelle famille de composés A appartient-il?
2) Déterminer sa formule brute et indiquer les différentes formules semi-développées possibles.
3) Le composé A est oxydé, en milieu acide, par le dichromate de potassium. Le composé B obtenu réagit avec la 2,4 dinitro-phénylhydrazine, mais est sans action sur le réactif de Schiff. En déduire, en justifiant, la formule semi-développée de B et le nom de ce composé.
4) Donner la formule développée et le nom de l'alcène de départ.

Exercice 21

11,5g d'éthanol, corps A, sont traités par un excès d'ions dichromates $Cr_2O_7^{2-}$ en présence d'ions H_3O^+. On obtient un mélange de deux corps B et C ; B fait virer le réactif de Schiff et C est un acide carboxylique. L'ion $Cr_2O_7^{2-}$ disparaît et fait place à l'ion Cr^{3+}.
1) Écrire et équilibrer les équations des réactions permettant de passer de A à B puis de B à C.

2) on obtient 9g du corps C. Calculer la masse de B restant dans le mélange sachant que tout l'éthanol a réagi.

Exercice 22

Un composé organique a pour formule brute C_2H_4O. On constate :
-qu'il donne un précipité avec la D. N. P. H,
-qu'il réduit la liqueur de Fehling.
Interpréter ces réactions et déterminer, en justifiant la réponse, la formule développée de cette substance.

Exercice 23

On place 1,80 g d'un alcool à chaîne saturée non cyclique dans un tube à essais avec un excès de sodium métal. Un gaz se dégage. Son volume mesuré dans les conditions normales de température et de pression vaut v = 336 mL.

1) Quelle est la nature de ce gaz ?
2) En déduire la valeur de la masse molaire de l'alcool A et sa formule brute.
3) Donner la formule semi-développée et le nom de l'alcool A sachant que ce dernier se forme de façon majoritaire au cours de l'addition d'eau sur le propène en milieu sulfurique.

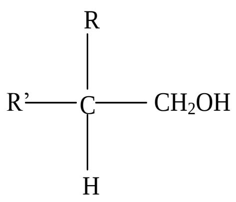
Donnée : volume molaire normale : $V_m = 22,4$ L.mol^{-1}.

Exercice 24

Soit un alcène symétrique A ; par hydratation, il donne B.

1) Quelle est la fonction chimique du composé B ?
2) On fait réagir B avec l'acide éthanoïque, il se forme les corps C et D. C est un composé organique, de masse molaire M = 116 g.mol^{-1}.
   - 2.1 Quelle est la fonction chimique de C ?
   - 2.2 En déduire les formules semi-développées de A, B et C.
   - 2.3 Écrire la réaction entre B et l'acide éthanoïque.
   - 2.4 Une des molécules précédentes A ou B est chirale. Laquelle ? Pourquoi ? Donner une représentation spatiale ou en perspective de ses énantiomères.

Exercice 25



La formule plane d'un alcool A est indiquée sur la figure ci-contre.

1). a)- Quelle est la classe de cet alcool ?

b)- On effectue une oxydation ménagée de l'alcool A par l'ion dichromate $Cr_2O_7^{2-}$ en milieu acide. Écrire l'équation d'oxydation de cet alcool dans le cas où la solution oxydante est en excès.

2) La masse molaire de A étant $M_A = 88$ g.mol^{-1}. Quelle est la formule semi-développée de A ? Quel est son nom ?

3) Pourquoi la molécule de cet alcool est-elle chirale ? Représenter les deux énantiomères.

Exercice 26

1) On dispose d'un corps A de formule brute $C_4H_{10}O$ dont la chaîne carbonée est linéaire. Il donne un précipité avec la 2,4-dinitrophénylhydrazine et réagit avec le réactif de Tollens qui contient l'ion diammine argent $Ag(NH_3)_2^+$

- Quelle est la formule semi-développée de A ? Quel est son nom ?
- Qu'observe t-on dans la réaction de A avec le réactif de Tollens ? Écrire l'équation-bilan.

2) L'oxydation catalytique de A par le dioxygène ou par une solution acidifiée de dichromate de potassium produit un corps B.

- Quelle est sa formule semi-développée et son nom ?

Exercice 27

1) Par oxydation ménagée d'un composé organique A, on obtient un composé B qui donne un précipité jaune avec la D. N. P. H et fait rosir le réactif de Schiff. En déduire la nature de A et de B. Donner les formules générales de ces deux corps.

2) On ajoute à B une solution de dichromate de potassium en milieu acide. La solution devient verte et on obtient un composé organique C. Donner, en justifiant la réponse, la formule générale de C.

3) C peut réagir sur A ; on obtient alors du propanoate de propyle.

4) En déduire les formules semi-développées de A, B et C en indiquant les noms de ces trois composés.

Exercice 28

Un alcool saturé non cyclique est déshydraté en un hydrocarbure dont la densité par rapport à l'air est 1,44.

Quelles sont les formules semi-développées possibles pour cet alcool ?

Quelle formule semi-développée doit-on retenir sachant que l'oxydation ménagée de cet alcool conduit à un composé donnant avec le réactif de Schiff une coloration rose ?

Exercice 29

La combustion complète de 0,870 g d'une substance organique ne contenant que du carbone, de l'hydrogène et de l'oxygène, donne 0,81g d'eau et 1,98 g de dioxyde de carbone.

1) Déterminer la composition centésimale de cette substance, c'est-à-dire, les compositions en masse des éléments qui la constituent.

2) Déterminer sa formule brute sachant que sa densité de vapeur est 2,00.

3) Cette substance :

- donne un précipité jaune avec la 2,4-dinitrophénylhydrazine,
- donne un précipité rouge brique lorsqu'elle est chauffée en présence de la liqueur de Fehling.

Montrer comment ces expériences permettent de déterminer la formule développée de la substance. La nommer.

Exercice 30

1) Un composé organique de masse molaire 88 $g.mol^{-1}$ contient en masse environ 68,2% de carbone, 13,6% d'hydrogène et 18,2% d'oxygène.

1.1- Déterminer les masses approximatives de carbone, d'hydrogène et d'oxygène contenus dans une mole de composé A.

1.2- En déduire la formule brute du composé A.

2) Le composé A est un alcool à chaîne ramifiée. Montrer qu'il existe cinq formules semi-dévelppées possibles pour A.

Nommer les différents isomères ainsi trouvés.

3) On fait subir à A une oxydation ménagée qui conduit à un composé B.

B réagit sur la 2,4 D. N. P. H pour donner un précipité jaune de 2-4-dinitrophénylhydrazone.

Pourquoi cette seule expérience ne permet-elle pas de déterminer sans ambiguïté la formule semi-développée de A ?

4) Le composé B ne réagit pas sur la liqueur de Fehling. Montrer que cette constatation permet de lever l'ambiguïté précédente.

Donner alors les formules semi-développées des corps A et B.

Exercice 31

On dispose de deux monoalcools saturés A et B.

1) On traite ces deux alcools par une solution diluée de dichromate de potassium en milieu sulfurique. Les deux solutions deviennent vertes. Que peut-on en déduire ?

2) Les composés organiques A' et B' extraits respectivement des deux solutions donnent un précipité avec la D. N. P. H. Quelles peuvent être les fonctions de A' et de B' ?

3) On répète les expériences précédentes avec d'autres échantillons de deux alcools, mais avec une solution concentrée de dichromate de potassium en excès. Les produits organiques obtenus sont notés A'' et B''. A'' donne un précipité avec la D. N. P. H alors que B'' n'en donne pas.

3.1 Quelles sont les fonctions de A'' et de B'' ? Montrer que A'' et A' sont identiques.

3.2 A comporte le minimum d'atomes de carbone compatible avec sa classe. Donner les noms et les formules semi-développées de A et de A'.

3.3 La masse molaire moléculaire de B'' est 88 $g.mol^{-1}$. Déterminer la formule moléculaire de B''. Donner les formules semi-développées et les noms des isomères possibles pour B'' et pour B.

<u>Exercice 32</u>

On souhaite préciser la structure moléculaire d'un alcène A de formule brute C_4H_8.

1) Quelles sont les formules semi-développées possibles correspondant à cette formule brute ?

2) On réalise l'hydratation de cet alcène, ce qui entraîne la formation de deux corps B et C tels que C est obtenu en quantité beaucoup plus grande que B.

Montrer que cette réaction permet d'éliminer l'une des hypothèses formulées en 1).

3) On oxyde B par le permanganate de potassium en milieu acide. Le produit D de cette oxydation donne un précipité jaune avec la D. N. P. H et une coloration avec le réactif de Schiff.

Quels renseignements concernant D et B peut-on déduire de ces observations ? Cela suffit-il pour expliciter complètement A ?

4) On soumet C à l'oxydation par le permanganate de potassium en milieu acide. Le produit E de cette oxydation donne un précipité jaune avec la D. N. P. H mais reste sans action sur le réactif de Schiff. Que peut-on en conclure sur la nature de E et de C ?

5) Donner les formules semi-développées et les noms des composés A, B, C, D, E.

6) L'un des composés B ou C présente un atome de carbone asymétrique. Indiquer lequel en justifiant votre réponse. Quel type de stéréoisomérie ce composé présente-t-il?

<u>Exercice 33</u>

Un monoalcool saturé et chirale A a une densité de vapeur d = 3,03.

3) L'oxydation ménagée de A par une solution acidifiée de dichromate de potassium conduit à un composé B qui ne réagit pas avec la 2,4 DNPH et sans action sur le réactif de Schiff.

1.1 Donner les formules semi-développées de A et de B, on nommera A et B.

1.2 L'alcool A est optiquement actif. Pourquoi ? On fera la représentation spatiale de ses deux énantiomères.

4) On laisse réagir dans une étuve, un mélange de 0,2mol de B avec le 2-méthylbutan-1-ol. Au bout de quelques jours, on obtient 0,09mol de composé C et de l'eau.

Écrire la réaction entre B et le 2-méthylbutan-1-ol, on nommera le composé C obtenu, puis calculer le pourcentage d'acide éstérifié.

On donne : M(C) = 12 $g.mol^{-1}$; M(O) = 16 $g.mol^{-1}$; M(H) = 1 $g.mol^{-1}$.

<u>Exercice 34</u>

1) Un alcool A de formule brute $C_n H_{2n+1}OH$ est obtenu par hydratation d'un alcène B de formuleC_nH_{2n}.

L'analyse quantitative de A montre qu'il contient 26,7% en masse d'oxygène.

Après avoir précisé la formule brute de A et de B, donner leurs formules semi-développées et leurs noms.

2) L'hydratation de l'ester $C_5H_{10}O_2$ donne de l'acide éthanoïque et du propan-2-ol.

2.1 Écrire l'équation-bilan de la réaction à partir de la formule semi-développée de l'ester.

2.2 La solution contient initialement 4,6g d'ester. Le rendement de la réaction étant 40%, déterminer la composition molaire de la solution finale.

On donne les masses moléculaires : M(O) = 16 $g.mol^{-1}$ M(H) = 1 $g.mol^{-1}$ M(C) = 12 $g.mol^{-1}$

<u>Exercice 35</u>

L'analyse d'un composé organique A qui ne renferme que les éléments C, H, O fournit les pourcentages suivants : carbone 68.18% et hydrogène 13.64%.

1. Déterminer la formule brute et la masse molaire de tous les isomères de A sachant que sa molécule ne contient qu'un seul atome d'oxygène.
2. Ecrire les formules semi-développées de tous les isomères alcools possibles de A.
3. Donner pour chacun d'eux son nom et la classe à laquelle il appartient.

On donne la masse molaire atomique en $g.mol^{-1}$: H =1 ; C = 12 ; O = 16

Exercice 36

1. Ecrire la formule semi-développée de 2-méthylbut-2-ène. Y- a-t-il possibilité d'isomère Z et E pour ce corps.

2. L'alcène précédent est hydraté en présence d'acide sulfurique. On obtient deux alcools A et B que l'on sépare.

A est un alcool secondaire, B est un alcool tertiaire

2.1 Ecrire les formules semi-développées de A et B et préciser leurs noms.

2.2 Quel est de A ou de B le composé obtenu majoritairement ?

Exercice 37

11.5g d'éthanol, corps pur, sont traités par un excès d'ions dichromate $Cr_2O_7^{2-}$ en présence d'ion H_3O^+. On obtient un mélange de deux corps B et C : B fait rosir le réactif de Schiff et C est un acide carboxylique.

1. Ecrire et équilibrer les équations des réactions permettant de passer de A à B puis de B à C.

2. On obtient 9 g du corps C. Calculer la masse de B restant dans le mélange sachant que tout l'éthanol a réagi ?

Exercice 38

On mélange 6 g de propan-1-ol avec 6g d'acide éthanoïque.

1. Ecrire l'équation bilan qui traduit la réaction d'estérification. Nommer le produit obtenu.

2. Lorsque le mélange atteint son équilibre chimique, l'analyse montre qu'il s'est formé 6,8 g d'ester.

2.1 Calculer à l'équilibre, les quantités en mol de l'ester, d'eau, d'acide ethanoïque et de propanol-1 présent dans le mélange.

2.2 Quelle est la fraction d'alcool estérifié ?

3. Comment pourrait-on obtenir le même résultat experimental en moins de temps ?

On donne la masse molaire en $g.mol^{-1}$: C = 12, O = 16 et H = 1.

2 Acide et base en solution aqueuse

Chapitre 1 : Généralités

1- Unités

Lors d'un examen, l'absence d'unité est pénalisée...!!!

Il est très important dans les exercices de préciser les unités : un chiffre ou un nombre doit presque toujours être accompagné d'une unité.

Symbole		Unité	
Nombre de moles	**n**	en moles	**mol**
Masse	**m**	en grammes	**g**
Masse molaire	**M**	en grammes par mole	**$g.mol^{-1}$**
Volume	**V**	en litres	**l**
Volume molaire	**V_m**	en litres par mole	**$l.mol^{-1}$**
Concentration molaire	**C**	en moles par litre ou en Molarité	**$mol.l^{-1}$ ouM**

2- Solution

Une solution est un liquide contenant plusieurs constituants :

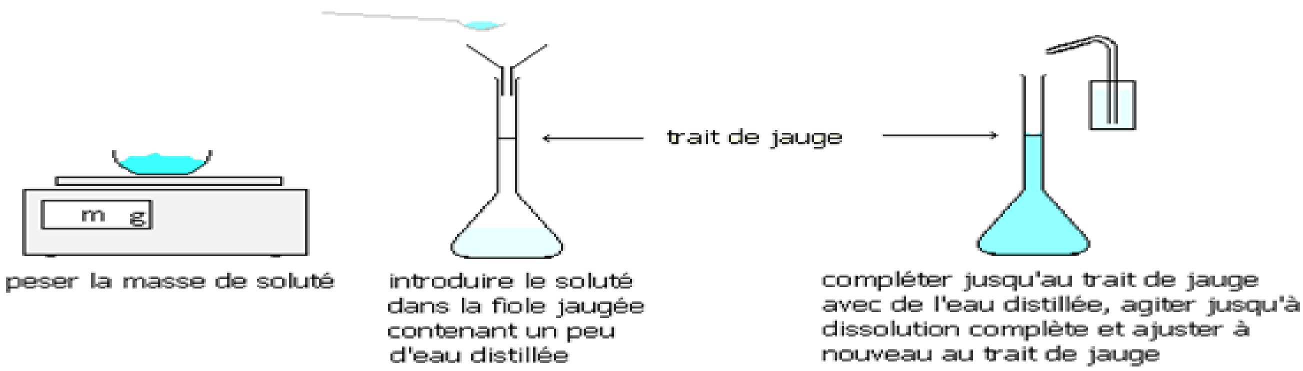
- Le constituant majoritaire appelé **solvant.**
- Le(ou les) composé(s) mis en solution appelé**s soluté(s)**

Soluté +solvant → solution

Si le solvant est l'eau, la solution est dite **aqueuse.**

Les espèces en solution sont soit des molécules soit des ions.

La préparation d'une solution aqueuse nécessite quelques opérations ;



Électrolyte (acides, bases, sels)
En solution aqueuse, les solutés sont dissociés en ions en donnant un électrolyte.
L'électrolyte est donc une solution aqueuse contenant des anions (-) et des cations (+). Il conduit le courant électrique. Une solution est électriquement neutre.
L'équation de l'électroneutralité se traduit par : la quantité de charges positives apportées par les cations est égale à la quantité de charges négatives par les anions.

$$\sum[+] = \sum[-]$$

<u>Exercice résolu1</u>:
Une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène.
Ecrire l'équation d'électroneutralité.
Solution

Les espèces chimiques présentes dans la solution sont :
- les ions : H_3O^+, OH^-, Cl ;
- la molécule : H_2O.

La neutralité se traduit par l'équation :
$[H_3O^+] = [OH^-] + [Cl^-]$

<u>Exercice résolu 2</u> :
Ecrire l'équation d'ionisation de chlorure de calcium dans l'eau ($CaCl_2$).
En déduire l'équation d'électroneutralité.
Solution

L'équation d'ionisation s'écrit :
$CaCl_2 \xrightarrow{eau} Ca^{2+} + 2Cl^-$.
Les espèces chimiques présentes dans la solution sont :
- les ions : $H3O^+$, Ca^+, OH^-, Cl^- ;
- la molécule : H_2O.

Equation de l'électroneutralité :
$[H_3O^+] + 2 \times [Ca^{2+}] = [OH^-] + [Cl^-]$.

Remarque : Pour une solution aqueuse, on comptabilise toutes les charges, par exemple : Al^{3+} porte 3 charges (+), SO_4^{2-} porte deux charges (-).

3- Degré de dissociation ou d'ionisation

$$\alpha = \frac{\text{quatité des molécules dissociées}}{\text{quantité des molécules introduites}}$$

La dissociation est **totale** (→) si α = 1.
La dissociation est **partielle** (⇌) si α < 1.

4- Concentration

concentration	Molaire (mol.ℓ⁻¹)	massique (g.ℓ⁻¹)	relation
formule	$c(mol.l^{-1}) = \frac{n}{V}$	$c(g.l^{-1}) = \frac{m}{V}$	$c(g.l^{-1})=M.c(mol.l^{-1})$

Pour **les gaz**, la quantité de matière exprimée en nombre de moles « n », la masse « m » ou le volume « V » sont reliés tels que :

$$n=\frac{m}{M}=\frac{V(gaz)}{V_m} \quad \text{(avec } V_m \text{ : volume molaire)}$$

5- Dilution

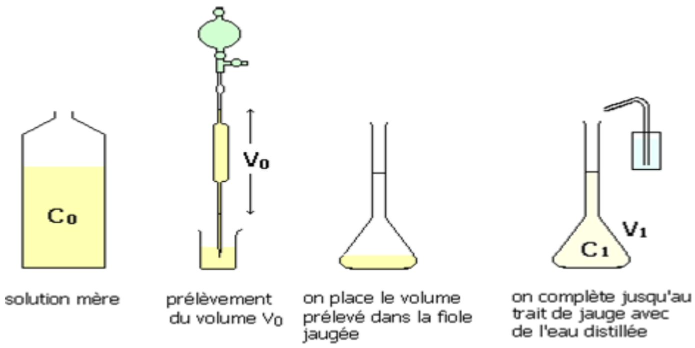
5-1- Définition

La dilution est l'opération qui consiste à diminuer la concentration d'une solution par addition d'eau.

5-2- Loi de dilution

Soit une solution de volume initial V_o, de concentration C_o (solution mère). En ajoutant progressivement de l'eau distillée, on obtient une nouvelle solution de concentration finale C_1 et de volume final V_1 (solution fille).
L'addition d'eau ne modifie pas la quantité de matière, par conséquent, $n_0 = n_1$.
D'où la formule qui traduit la loi de dilution : $\mathbf{C_i . V_i = C_f . V_f}$

5-3- Préparation d'une solution diluée :



Exercice résolu 3

1- **Comment calculer le volume V_0 de solution mère de concentration C_0 afin de préparer V mL de solution fille de concentration $C < C_0$?**

Solution

Puisque C<C, alors on effectue une dilution d'où :
$n_0 = n$
Il vient : $C_0 . V_0 = C. V$
Alors :
$V_0 = \frac{C.V}{C_O}$

2- **Comment calculer le volume V_0 de solution mère de concentration C_0 afin de préparer V mL de solution fille diluée N fois ?**

Solution

Puisque $C<C_0$ alors on effectue une dilution d'où :
$n_0 = n$
il vient : $C_0 . V_0 = C . V$ avec $C = \frac{C_O}{N}$.
D'où $V_O = \frac{C.V}{C_O} = \frac{V}{N}$

6- Autoprotolyse et produit ionique de l'eau.

La réaction d'autoprotolyse de l'eau a lieu dans toute solution aqueuse.
L'équation-bilan s'écrit $\boxed{\boldsymbol{2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-}}$
A une température donnée, on associe à cette réaction d'autoprotolyse de l'eau une constante d'équilibre K_e appelée **« produit ionique de l'eau ».**
Dans toute solution aqueuse, on a la relation :

$$\boldsymbol{K_e} = [\boldsymbol{H_3O^+}].[\boldsymbol{OH^-}] \quad \text{(à 25°C } \boldsymbol{K_e = 10^{-14}})$$

$$\text{pKe} = -\log \boldsymbol{K_e}$$

chapitre 2 : couple Acide/Base

1- Quelques définitions

1-1- Acide et base

a- <u>Selon Arrhenius</u>

- Un **acide A** est une molécule ou un ion qui libère des **ions hydronium H_3O^+** en solution aqueuse :

  $$\boxed{A + H_2O \rightarrow B + H_3O^+}$$

- Une **base B** est une molécule ou un ion qui libère des **ions hydroxydes OH^-** en solution aqueuse :

  $$\boxed{B + H_2O \rightarrow A + OH^-}$$

b- <u>Selon Bronsted-Lowry</u>

- Un acide A est une molécule, ou un ion, susceptible de céder un proton H^+.
- Une base B est une molécule, ou un ion, susceptible de fixer un proton H^+.

<u>Remarque :</u> la définition utilisée dans les paragraphes suivants est celle de Bronsted-Lowry.

1-2- Couple acido-basique

A tout acide A est associée une base conjuguée B, et à toute base est associé un acide conjugué. Ils forment un couple acide/base noté (A/B).
Ce couple est représenté par la demi-équation équilibrée : $A + H_2O \rightleftarrows B + H_3O^+$

Exemples de couple acide/base :
Ion oxonium(ou hydronium)/eau : H_3O^+/H_2O ;
Eau/Ion hydroxyde : H_2O/OH^- ;
Ion ammonium/ammoniac: NH_4^+/NH_3;
Acide éthanoïque (ou acétique) /ion éthanoate : CH_3COOH/CH_3COO^- .

1-3- Amphotères – ampholytes

Les amphotères ou ampholytes sont des espèces chimiques qui peuvent se **comporter**, suivant les conditions, **soit comme un acide soit comme une base**.

<u>Cas de l'eau :</u>
L'équilibre d'autoprotolyse de l'eau fait intervenir les deux réactions de transfert :

$$H^+ + H_2O \leftrightarrows H_3O^+$$
$$H_2O \leftrightarrows H^+ + OH^-$$

d'où l'eau est amphotère. On dit aussi que l'eau est un ampholyte.

$$2H_2O \leftrightarrows H_3O^+ + OH^-$$

2- pH des solutions aqueuses

2-1- Définition

L'ion hydronium H_3O^+ est responsable de l'acidité d'une solution.
Le pH permet de déterminer cette acidité.

Le pH d'une solution aqueuse suffisamment diluée (10^{-6}mol.l^{-1}<C<10^{-1}mol.l^{-1}) est liée à la concentration en ions Hydronium présents dans la solution par la relation :

$$pH = -\log[H_3O^+] \; ou \; [H_3O^+] = 10^{-pH}$$

2-2- Mesure du pH d'une solution

Il existe deux méthodes pour mesurer le pH d'une solution :

a- Utilisation d'un papier pH
Cette méthode est rapide mais donne des valeurs approchées.

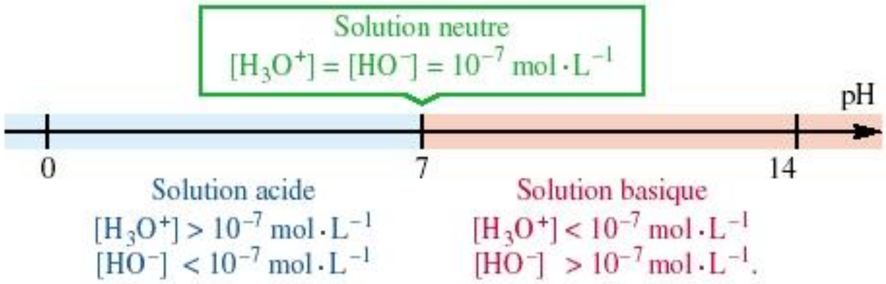
b- Emploi d'un pH-mètre
Les valeurs ainsi obtenues sont précises.

3- Solution acide-Solution basique

Une solution acide est telle que $[H_3O^+] > [OH^-]$, soit encore $pH < \frac{pKe}{2}$.

Une solution neutre est telle que $[H_3O^+] = [OH^-]$, soit encore $pH = \frac{pKe}{2}$

Une solution basique est telle que $[H_3O^+] < [OH^-]$, soit encore $pH > \frac{pKe}{2}$



__Remarques__

- pH d'une solution d'acide fort (HCl, HNO_3, HBr, HI…) : $pH = -logC_A$
  cette formule n'est valable que pour : $10^{-6} \leq C_A < 10^{-1}$ mol.l^{-1}
  $C_A < 10^{-6}$ mol.l^{-1} alors pH = 7.
- pH d'une solution de base forte (NaOH, KOH,$C_nH_{2n}O^-$…) : $pH = 14 + logC_B$
  cette formule n'est valable que pour : $10^{-6} \leq C_B < 10^{-1}$ mol.l^{-1}
  $C_B < 10^{-6}$ mol.l^{-1} alors pH = 7.

__Exercice résolu 4__

a) On dispose d'une solution (1) d'hydroxyde de sodium de concentration $C_1 = 5.10^{-3}$ mol.l^{-1} et d'une solution (2) d'hydroxyde de potassium de concentration $C_2 = 10^{-3}$mol.l^{-1}
Calculer le pH respectif de chacune de ces solutions.

b) On mélange un volume $V_1 = 10$ml de la solution (1) avec un volume $V_2 =50$ml de la solution (2).
Quel est le pH du mélange obtenu ?
Calculer la concentration de toutes les espèces chimiques dans le mélange.

Solution

a) Pour l'hydroxyde de sodium : $pH_1 = 14 + \log C_1$
On a : $pH_1 = 14 + \log 5.10^{-3} = 11{,}7$.
Pour l'hydroxyde de potassium : $pH_2 = 14 + \log C_2$
On a : $pH_2 = 14 + \log 10^{-3} = 11$.

b) La quantité de matière d'ions OH^- :
- Dans la solution d'hydroxyde de sodium : $n_1 = C_1.V_1 = 5.10^{-5}$mol.
- Dans la solution d'hydroxyde de sodium : $n_2 = C_2.V_2 = 5.10^{-5}$mol.
- Dans le mélange : $n_{OH^-} = n_1 + n_2 = 10^{-4}$ mol.
  La concentration $[OH^-] = \frac{n_{OH^-}}{V_1+V_2} = 1{,}7.10^{-3}$ mol.l^{-1}.
  $[H_3O^-] = \frac{K_e}{[OH^-]} = 5{,}9.10^{-12}$ mol.l^{-1}.

D'où pH = 11,2 pour le mélange.
Les espèces chimiques dans le mélange :
Ions : Na^+, K^+, OH^- et H_3O^+ ;
Molécules : H_2O
La quantité d'ion Na^+ est n_1 et la quantité d'ions K^+ est n_2.

$[Na^+] = \frac{n_1}{V_1+V_2}$

$= \frac{5.10^{-5}}{60.10^{-3}} = 8{,}3.10^{-4} mol.l^{-1}$.

$[K^+] = \frac{n_2}{V_1+V_2}$

$= \frac{5.10^{-5}}{60.10^{-3}} = 8{,}3.10^{-4} mol.l^{-1}$.

On vérifie l'électroneutralité du mélange. H_3O^+ est espèce ultra-minoritaire.

4- Force des acides et des bases

4-1- Définitions

- Un acide ou une base est faible si sa dissociation dans l'eau est limitée et conduit à un équilibre.
- La force d'un acide (ou d'une base) caractérise sa tendance plus ou moins grande à céder (ou à capter) un proton.
- Plus l'acide est fort, plus sa base conjuguée est faible, et réciproquement.

4-2- Constante d'acidité K_a : Notion de pK_a.

Pour un couple acide-base A/B qui donne lieu à un équilibre chimique : $A + H_2O \rightleftarrows B + H_3O^+$

On évalue la force de l'acide par sa constante d'acidité : $K_a = \frac{[B][H_3O^+]}{[A]}$

On utilise le plus souvent le pK_a : $pK_a = -logK_a$

Remarque : K_a et le pK_a varie en sens inverse.

4-3- pH d'une solution d'acide ou de base faible

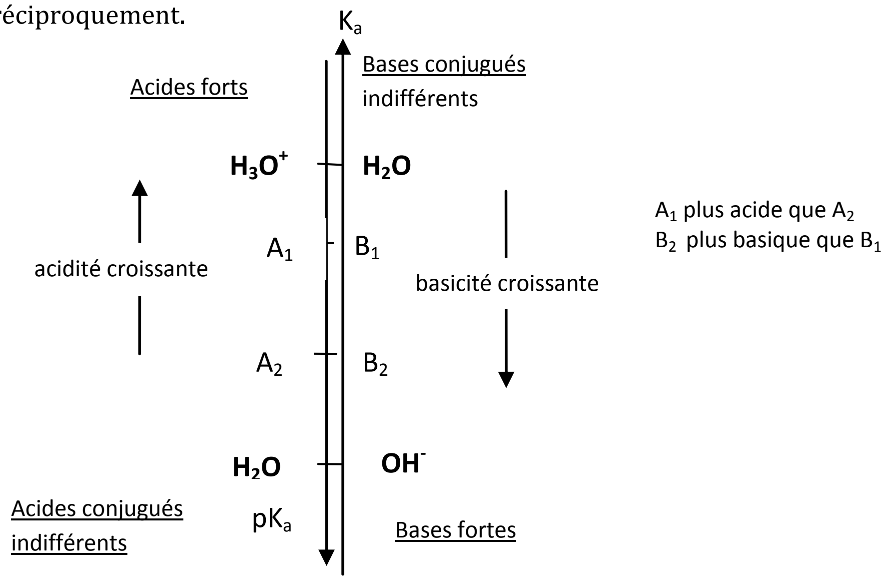
$$pH = pK_a + log\frac{[B]}{[A]}\ (formule\ de\ Henderson)$$

Les concentrations sont celles que l'on obtient à l'équilibre.

4-4- Classification des couples A/B dans l'eau

Force des acides et des bases

L'acide est d'autant plus fort et sa base conjuguée d'autant plus faible que son K_a est grand ou que son pK_a est petit, et réciproquement.



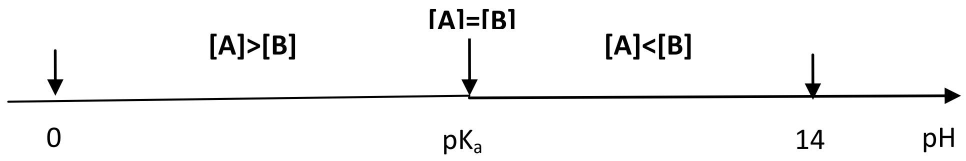
Quelques exemples de couples Acide/Base

Acide/base	formule		Ka	pKa	
Acide trichloroéthanoïque/ion tirchloroéthanoate	CCl_3COOH/CCl_3COO^-	Acide de plus en plus fortt	$2,0.10^{-1}$	0,7	Base de plus en plus forte
Acide dichloroéthanoïque/ion dichloroéthanoate	$CHCl_2COOH/CHCl_2COO^-$		$5,0.10^{-2}$	1,30	
Acide oxalate/ion hydrogènooxalate	$H_2C_2O_4/\ HC_2O_4^-$		$5,0.10^{-2}$	1,30	
Acide phosphorique/ion dihydrogénophosphate	$H_3PO_4/\ H_2PO_4^-$		$7,6.10^{-3}$	2,12	
Acide fluoroéthanoïque/ion fluoroéthanoate	$CH_2FCOOH/\ CH_2FCOO^-$		$2,7.10^{-3}$	2,57	
Acide chloroéthanoïque/ion chloroéthanoate	$CH_2ClCOOH/\ CH_2ClCOO^-$		$1,4.10^{-3}$	2,86	
Acide bromoéthanoïque/ion bromoéthanoate	$CH_2BrCOOH/\ CH_2BrCOO^-$		$1,3.10^{-3}$	2,90	
Acide iodoéthanoïque/ion iodoéthanoate	$CH_2ICOOH/\ CH_2ICOO^-$.		$6,9.10^{-4}$	3,16	
Acide fluorhydrique/ion fluorure	HF/F^-		$6,8.10^{-4}$	3,17	
Acide nitreux/ion nitrite	HNO_2/NO_2^-		$5,0.10^{-4}$	3,30	
Acide méthanoïque/ion méthanoate	$CCOOH/\ CCOO^-$		$1,8.10^{-4}$	3,75	
Acide lactique/ion lactate	$CH_3CHOHCOOH/\ CH_3CHOHCOO^-$		$1,4.10^{-4}$	3,86	
Acide benzoïque/ion benzoate	$C_6H_5COOH/\ C_6H_5COO^-$		$6,3.10^{-5}$	4,20	
Ion anilinium/aniline	$C_6H_5NH_3^+/\ C_6H_5NH_2$		$2,4.10^{-5}$	4,62	
Acide éthanoïque/ion éthanoate	CH_3COOH/CH_3COO^-		$1,8.10^{-5}$	4,75	
Acide propanoïque/ion propanoate	$C_2H_5COOH/C_2H_5COO^-$		$1,4.10^{-5}$	4,87	
Ion hydroxylammonium/hydroxylamine	NH_3OH^+/NH_3		$1,0.10^{-6}$	6,00	
Dioxyde de carbone/ion hydrogénocarbone	CO_2/HCO_3^-		$4,5.10^{-7}$	6,35	
Acide hypochloreux/ion hypochorite	$HclO/ClO^-$		$5,0.10^{-8}$	7,30	
Ion ammonium/ammoniac	NH_4^+/NH_3		$6,3.10^{-10}$	9,20	
Ion triméthylammonium/triméthylamine	$(CH_3)_3NH^+/(CH_3)_3N$		$1,3.10^{-10}$	9,90	
Phénol/ion phénolate	$C_6H_5OH/\ C_6H_5O^-$		$1,0.10^{-10}$	10	
Ion hydrogénocarbonate/ion carbonate	HCO_3^-/CO_3		$4,8.10^{-11}$	10,32	
Ion éthylammonium/éthylamine	$C_2H_5NH_3^+/\ C_2H_5NH_2$		$2,1.10^{-11}$	10,67	
Ion méthylammonium/méthylamine	$CH_3NH_3^+/\ CH_3NH_2$		$1,9.10^{-11}$	10,72	
Ion diéthylammonium/diéthylamine	$(C_2H_5)_2\ NH_2^+/\ (C_2H_5)_2\ NH$		$1,0.10^{-11}$	11,00	
Ion diméthylammonium/diméthylamine	$(CH_3)_2\ NH_2^+/\ (CH_3)_2\ NH$		$9,6.10^{-12}$	11,02	

Remarque :

- Pour un acide fort ou une base forte, la réaction est totale avec l'eau, on ne peut pas définir le K_a, par conséquent on ne peut pas classer les acides forts et les bases fortes.
- Les **acides forts** sont tous **équivalents à l'ion hydronium H_3O^+**, leurs bases conjuguées sont indifférentes (pas de réaction sur l'eau).
- Les **bases fortes** sont tous équivalents à **l'ion hydroxyde OH^-**, leurs acides conjugués sont indifférents.

4-5- Domaine de prédominance de la forme acide et de sa base conjuguée en fonction du pH.



4-6- Les indicateurs colorés

Un indicateur coloré appartient à un couple acide faible/base faible noté HInd/Ind⁻ dont les formes acide (HInd) et basique (Ind⁻) ont des colorations différentes. Un indicateur est caractérisé par son

$$Ka_I = \frac{[H_3O^-].[Ind^-]}{[HInd]} \text{ ou } pKa_I = -\log Ka_I$$

La prédominance de la forme acide ou de la forme basique impose la coloration de la solution.

Pour un **pH voisin du** pKa_I il y a superposition des couleurs des deux formes appelée **teinte sensible de l'indicateur coloré.**

Le changement de couleur ou virage de l'indicateur coloré ne se fait pas pour un pH déterminé mais sur **un intervalle de pH** qui encadre le pKa_I appelé **zone de virage.**

Exemples : Trois indicateurs colorés usuels

Indicateur	**pKa_I**	**Coloration acide**	**Zone de virage (teinte sensible)**	**Coloration basique**
Hélianthine	3,4	rouge	3,1 - 4,4 (orange)	jaune
Bleu de bromothymol (B.B.T)	7,1	jaune	6,2 – 7,6 (vert)	bleu
Phénolphtaléine	9,4	incolore	8,2 -10 (rose)	violacé

fiche méthode 

COMMENT RESOUDRE UN PROBLEME DE CHIMIE?

- Ecrire les équations bilans (dissolution de l'acide ou de la base, autoprotolyse….)
- Faire l'inventaire des espèces chimiques présentes dans la solution
- Utilisation des données et des équations relatives au système : pH; neutralité électrique ; conservation des éléments ;
- Résolution et approximation : $\frac{[A]}{[B]} \leq 10^{-2} \rightarrow [A] minoritaire, [B] majoritaire$

  $$\frac{[A]}{[B]} \leq 10^{-4} \rightarrow [A] ultra - minoritaire, [B] ultra - majoritaire$$

- L'équation de l'électroneutralité se traduit par : la quantité de charges positives apportées par les cations est égale à la quantité de charges négatives par les anions.

$$\sum[+] = \sum[-]$$

Chapitre 3 : Réactions acido-basiques

1- Définition

Une réaction acido-basique est une réaction de transfert de protons entre deux couples A_1/B_1 et A_2/B_2.

$$A_1 \leftrightarrows B_1 + H^+$$
$$B_2 + H^+ \leftrightarrows A_2$$

$$A_1 + B_2 \rightleftarrows A_2 + B_1$$

2- Sens de la réaction

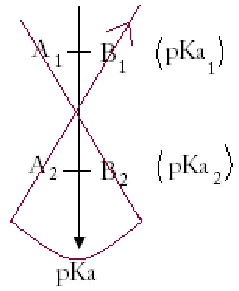
La réaction sera favorisée dans le sens (1) d'après la règle de γ ($pKa_1 < pKa_2$)

La réaction entre A_1 et B_2 peut être considérée comme **totale** dès que

$pKa_1 - pKa_2 > 3$

La réaction entre A_2 et B_1 peut être considérée comme nulle dès que

$pKa_1 - pKa_2 < -3$



<u>Exercice résolu 5</u>

On dispose d'une solution aqueuse de phénol (C_6H_5-OH) de concentration $C_A = 1{,}1.10^{-2}$ mol.l^{-1}.

Son pH = 5,9. Une solution aqueuse d'acide benzoïque ((C_6H_5-COOH), de même concentration molaire a un pH =3,1.

1- Ecrire l'équation bilan de l'ionisation dans eau du phénol.

2- Comparer, en justifiant votre réponse, le comportement en solution aqueuse :

- **du phénol et l'acide benzoïque**
- **de l'ion phénolate et de l'ion benzoate.**

3- Situer le pKa_2 du couple phénol/ion phénolate par rapport au pKa_1 du couple acide benzoïque/ion benzoate.

Sachant qu'ils sont respectivement 4,2 et 10.

4- l'ion benzoate réagit-il avec le phénol ?

Solution

1- Equation de l'ionisation dans l'eau de phénol

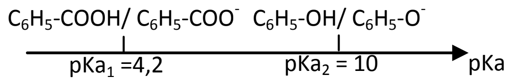
$C_6H_5\text{-}OH + H_2O \rightleftharpoons C_6H_5\text{-}O^- + H_3O^+$

$C_A = 1{,}1.10^{-2}$ mol.l^{-1} et pH = 5,9 : le phénol est un acide faible puis que $[H_3O^+] = 10^{-5{,}9} \simeq 1{,}26.10^{-6} < C_A$.

2- Comparaison :

Les solutions ayant des concentrations molaires égales, on peut comparer leurs pH respectifs : $pH_1 = 3{,}1$ et $pH_2 = 5{,}9$. La solution la plus acide correspond à l'acide dont la force est la plus grande. Donc l'acide benzoïque est l'acide plus fort que le phénol. Inversement l'ion phénolate est une base plus forte que l'ion benzoate.

3- Soient Ka_1, la constante d'acidité du couple acide benzoïque/ion benzoate, et Ka_2, la constante d'acidité du couple phénol/ion phénolate. Avec $Ka_1 > Ka_2$,alors : $pka_1 < pKa_2$



4- On a : $pka_1 - pKa_2 = 5{,}8 > 3$. C'est donc l'acide benzoïque qui réagit avec sur l'ion phénolate, mais la réaction du phénol avec l'ion benzoate est nulle.

Les réactions acido-basiques considérées comme totales sont :

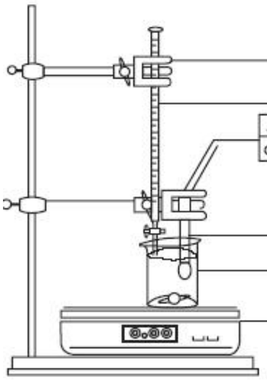
réaction	Acide fort + base forte	Acide fort +base faible	Acide faible + base forte
bilan	$H_3O^+ + OH^- \leftrightarrows 2H_2O$	$H_3O^+ + B \longrightarrow H_2O + A$	$A + OH^- \longrightarrow B + H_2O$

3- Dosage acido-basique

3-1- Définition

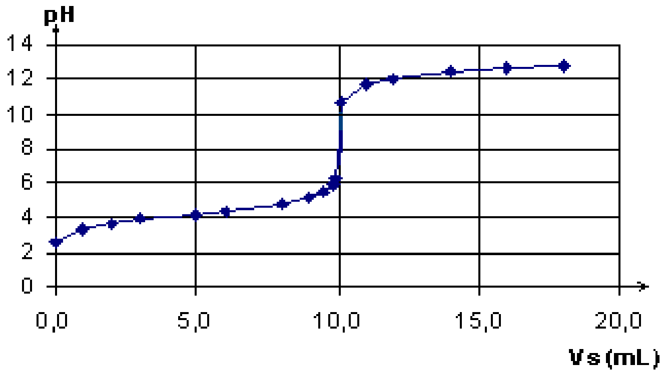
C'est la détermination de la concentration d'une solution acide ou basique.

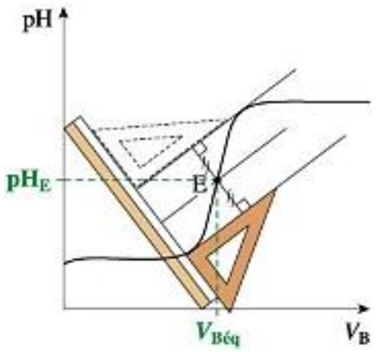
Schéma de l'expérience :



3-2- Détermination du point d'équivalence E

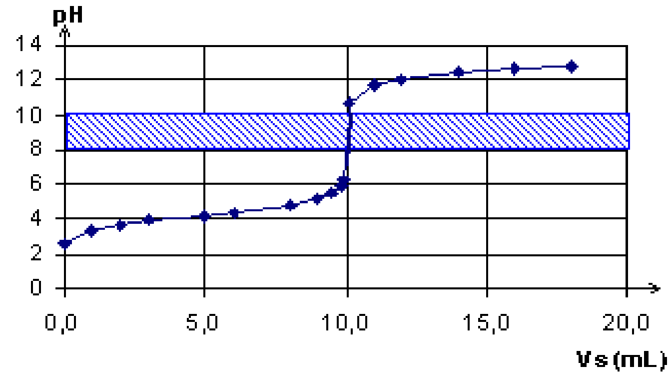
A l'équivalence on a $n_A = n_B \Longrightarrow C_A.V_A = C_B.V_B$ (pour un monoacide et une monobase).
Au voisinage du point d'équivalence E, observe un brusque saut du pH.
A l'équivalence, acide et base sont mélangés dans des proportions stœchiométriques.
Il existe deux méthodes pour déterminer le point d'équivalence :
Premiere méthode : méthodes des tangentes.
On trace la courbe de variation du **pH** en fonction du volume **V**$_S$ de réactif versé. (Figure 3.a)

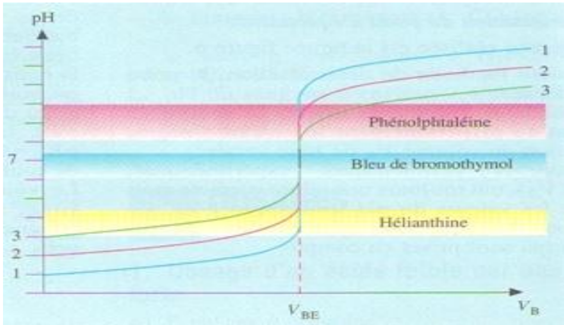




Tracer deux tangentes à la courbe de titrage, parallèles entre elles et situées avant et après le saut de pH, donc de part et d'autre du point d'équivalence E. Tracer ensuite une parallèle équidistante des deux tangentes. Elle coupe la courbe de titrage au point d'équivalence E

Deuxième méthode : Utilisation de l'indicateur coloré
Le changement de coloration de l'indicateur dans le bécher indique la fin du dosage, on repère sur la burette le volume de réactif pour obtenir l'équivalence.





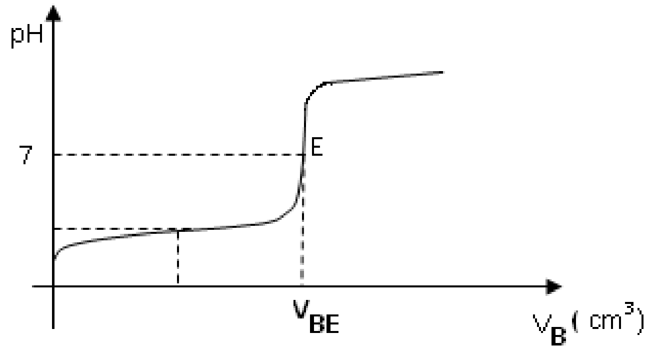
On choisit un indicateur coloré de telle façon que la détermination du point équivalent soit la plus précise possible. On choisit un indicateur coloré tel que le point équivalent se situe dans sa zone de virage de couleur.
Il est possible d'utiliser un indicateur tel que le point d'équivalence se situe à l'extérieur de cette zone mais proche de la limite supérieure ou inférieure.

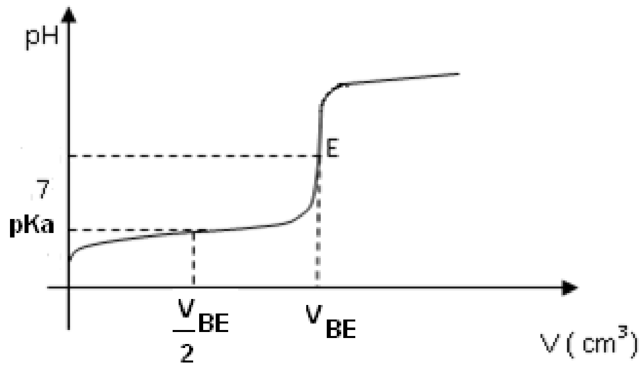
Calcul de la concentration de la solution à doser :

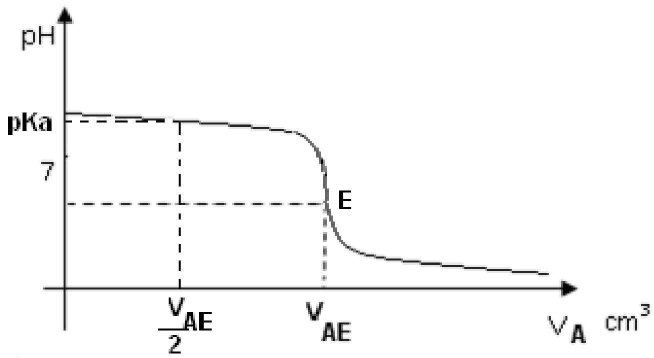
Pour un monoacide AH dosé par une solution d'hydroxyde de sodium, l'équation de dosage est
$AH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \rightarrow A^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$ on a à l'équivalence : $n(HO^-)_{versé} = n(AH)_0$
$c_A V_{a0} = c_B V_{b\,éq} \Rightarrow c_A = c_B V_{b\,éq} / V_{a0}$
Le raisonnement est identique dans le cas où l'on dose une solution de base par une solution titrée d'acide.
On aura alors : $c_B = c_A V_{a\,éq} / V_{b0}$

3-3- Résultats

Réaction	**Equivalence E : V(réactif)=V_E**	**Demi-équivalence E/2 : V(réactif)= $V_E/2$**	**Indicateur Coloré**
Acide fort + Base forte	**$pH_E = 7$**		**B.B.T**
Acide fort + Base faible	**$pH_E<7$** (solution de l'acide conjugué de la base faible)	**$pH = pK_a$** (solution tampon)	**Hélianthine**
Acide faible+ Base forte	**$pH_E > 7$** (solution de la base conjuguée de l'acide faible)	**$pH = pK_a$** (solution tampon)	**phénolphtaléine**







3-4- Solutions tampons

a- Définition

Les solutions tampons sont des solutions constituées de quantités comparables d'un acide faible et de sa base conjuguée.

b- Obtention

Pour obtenir une solution tampon, on peut :

- Soit ajouter à une solution d'acide faible (ou de base faible) une base forte (ou un acide fort) de sorte que l'on soit à la demi-équivalence.
- Soit en faisant un mélange équimolaire d'un acide faible (ou d'une base faible) et de sa base conjuguée (et de son acide conjugué).

c- Propriétés

Le pH d'une solution tampon est insensible à la dilution, varie peu par addition modérée d'acide ou de base, est voisin du pK_a.

Exercice résolu 6:

Etudier la solution de chlorure d'hydrogène de concentration initiale $C_A = 10^{-2}$ mol.l^{-1} et a pour pH = 2,0.

Solution

- *Equation bilan* :
  $HCl + H_2O \; ---\rightarrow Cl^- + H_3O^+$.
- *Espèces chimiques présents* :
- ions : Cl^- , H_3O^+ et OH^- ;
- molécules : H_2O et HCl non dissociée.
  Concentration de chaque espèce :
- $[H_3O^+] = 10^{-Ph}$ (utilisation de la définition pH)
  $= 10^{-2}$ mol.l^{-1}
- $[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]}$ (utilisation du produit ionique de l'eau à 25°C)

$= 10^{-12}$ mol.l^{-1}.

$\frac{[OH^-]}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-12}}{10^{-2}} = 10^{-10} << 10^{-4}$. Alors la concentration $[OH^-] << [H_3O^+]$: $[OH^-]$ négligeable devant $[H_3O^+]$.

L'espèce OH^- est ultra-minoritaire devant H_3O^+.

- Equation de neutralité :

$[H_3O^+] = [OH^-] + [Cl^-]$

$[Cl^-] \simeq [H_3O^+]$ car $[OH^-] << [H_3O^+]$.

$[Cl^-] \simeq 10^{-2}$ mol.l^{-1}. (Cl^- et H_3O^+ sont des espèces majoritaires).

- Conservation de la matière :

$n_{initial}$: Nombre de moles initialement présent de HCl

n_{rest} : Nombre de moles restant dans la solution de HCl

n_{diss} : Nombre de moles de HCl dissociés

$n_{initial} = n_{rest} + n_{diss}$.

On divise par le même volume V :

$C_A = [HCl]_{rest} + [Cl^-]$

$[HCl]_{rest} = C_A - [Cl^-]$

$= 0$

$[HCl]_{rest} = 0$ alors les molécules **HCl** sont totalement dissociés.

C'est un acide fort.

Exercice résolu 7

Etudier la solution de hydroxyde de sodium NaOH de concentration initiale $C_B = 10^{-2}$ mol.l^{-1} et a pour pH = 12,0.

Solution

- *Equation bilan* :

$NaOH \xrightarrow{eau} Na^+ + OH^-$.

- *Espèces chimiques présents* :
  - ions : Na^{-+} , H_3O^+ et OH^- ;
  - molécules : H_2O et NaOH non dissociée.

Concentration de chaque espèce :

- $[H_3O^+] = 10^{-Ph}$ (utilisation de la définition pH)

$= 10^{-12}$ mol.l^{-1}

- $[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]}$ (utilisation du produit ionique de l'eau à 25°C)

$= 10^{-2}$ mol.l^{-1}.

$\frac{[H_3O^+]}{[OH^-]} = \frac{10^{-12}}{10^{-2}} = 10^{-10} << 10^{-4}$. Alors la concentration $[OH^-] >> [H_3O^+]$: $[H_3O^+]$ négligeable devant $[OH^-]$.

L'espèce H_3O^+ est ultra-minoritaire devant OH^- .

- Equation de neutralité :

$[H_3O^+] + [Na^+] = [OH^-]$

$[Na^+] \simeq [OH^-]$ car $[OH^-] >> [H_3O^+]$.

$[Na^+] \simeq 10^{-2}$ mol.l^{-1}. (Na^+ et OH^- sont des espèces majoritaires).

- Conservation de la matière :

$n_{initial}$: Nombre de moles initialement présent de NaOH

n_{rest} : Nombre de moles restant dans la solution de NaOH

n_{diss} : Nombre de moles de NaOH dissociés

$n_{initial} = n_{rest} + n_{diss}$.

On divise par le même volume V :

$C_B = [NaOH]_{rest} + [Na^+]$

$[NaOH]_{rest} = C_B - [Na^+] = 0$

$[NaOH]_{rest} = 0$ alors les molécules **NaOH** sont totalement dissociés.

C'est une base forte.

Exercice résolu 8

Etudier la solution d'acide éthanoïque CH_3COOH de concentration initiale $C_A = 10^{-2}$ mol.l^{-1} et a pour pH = 3,4.

Solution

Equation bilan :

$CH_3COOH + H_2O \rightleftarrows CH_3COO^- + H_3O^+$.

Espèces chimiques présents :

- ions : CH_3COO^- , H_3O^+ et OH^- ;
- molécules : H_2O et CH_3COOH non dissociée.

Concentration de chaque espèce :

- $[H_3O^+] = 10^{-Ph}$ (utilisation de la définition pH)
  $= 10^{-3,4}$ mol.l^{-1}
  $= 4.10^{-4}$ mol.l^{-1}.
- $[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]}$ (utilisation du produit ionique de l'eau à 25°C)
  $= 2,5.10^{-11}$ mol.l^{-1}.

$[OH^-] << [H_3O^+]$: $[OH^-]$ négligeable devant $[H_3O^+]$.

L'espèce OH^- est ultra-minoritaire devant H_3O^+

- Equation de neutralité :
  $[H_3O^+] = [OH^-] + [CH_3COO^-]$
  $[CH_3COO^-] \simeq [H_3O^+]$ car $[OH^-] << [H_3O^+]$.
  $[CH_3COO^-] \simeq 4.10^{-4}$ mol.l^{-1}.
- Conservation de la matière :
  $C_A = [CH_3COOH]_{rest} + [CH_3COO^-]$
  $[CH_3COOH]_{rest} = C_A - [CH_3COO^-]$
  $= 10^{-2} - 4.10^{-4}$
  $= 9,6.10^{-8}$mol.l^{-1}.
  $[CH_3COOH]_{rest} \neq 0$.
  L'ionisation de l'acide acétique n'est que partielle,
- Le degré d'ionisation, $\alpha = \frac{[CH_3COO^-]}{C_A}$
  $= \frac{4.10^{-4}}{10^{-2}} = (4,0\%)$
- Un tel acide est un acide faible.
  La plupart des acides carboxylique R-COOH sont des acides faibles.

Exercice résolu 9

A la température ordinaire, la solution décimolaire (1/10 mole par litre) de la monoéthylamine $C_2H_5\text{-}NH_2$ a un pH = 11,86.

Solution

Equation bilan :

$C_2H_5NH_2 + H_2O \rightleftarrows C_2H_5NH_3^+ + OH^-$

Espèces chimiques présents dans la solution :

Les ions :$C_2H_5NH_3^+$, H_3O^+et OH^-.

Les molécules : $C_2H_5NH_2$ et H_2O

pH = 11,86 correspondant à $[H_3O^+] = 1,4.10^{-12}$ mol.l^{-1}

et, par suite, à $[OH^-] = 7,3.10^{-3}$ mol.l^{-1} (produit ionique de l'eau).

Neutralité ionique :

$[C_2H_5NH_3^+] + [H_3O^+] = [OH^-]$. Or $[H_3O^+] << [OH^-]$.

$[C_2H_5NH_3^+] \simeq 7,3.10^{-3}$ mol.l^{-1}

Conservation de la matière

$C_B = [C_2H_5NH_2]_{restant} + [C_2H_5NH_3^+]$
$[C_2H_5NH_2]_{restant} = C_B - C_2H_5NH_3^+]$
$[C_2H_5NH_2]_{restant} = 10^{-1} - 7,3.10^{-3}$
$= 10.10^{-2} - 0.73.10^{-2}$
$= 9,27.10^{-2}$ mol.l^{-1}
$[C_2H_5NH_2]_{restant} \neq 0$.

- L'ionisation de la base monoéthylamine est partielle,
- Le degré d'ionisation est $\alpha = 7,3.10^{-2}$. (7,3%),
- Une telle base est une base faible.
- (ammoniac, $\alpha = 1,3.10^{-2}$. (1,3%)).

Exercice résolu 10

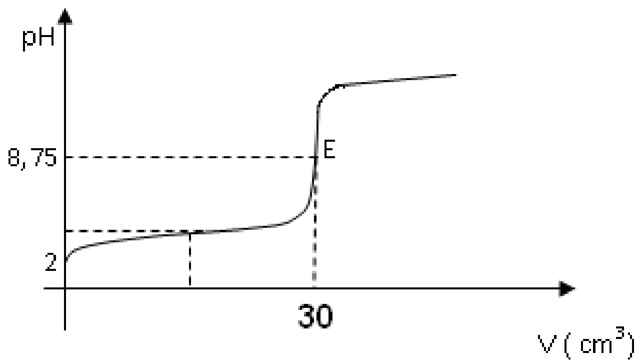
Une solution diéthylamine $(C_2H_5)_2NH$ a un pH égal 11,5 à 25°C. Sachant que le couple $(C_2H_5)_2NH_2^+$ /$(C_2H_5)_2NH$ a un pKa = 11.
Déterminer la concentration de toutes les espèces chimiques présentes dans la solution, ainsi que la concentration C en diéthylamine $(C_2H_5)_2NH$.

Solution

Equation d'ionisation :
$(C_2H_5)_2NH + H_2O \rightleftarrows (C_2H_5)_2NH_2^+ + OH^-$
Espèces chimiques présentes : $(C_2H_5)_2NH_2^+$, H_3O^+, OH^-,$(C_2H_5)_2NH$
Concentration en ion H_3O^+ : $[H_3O^+] = 10^{-pH}$
$= 3,2.10^{-12}$ mol.l^{-1}
Concentration en ion OH^- : d'après le produit ionique de l'eau
$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]}$
$= 3,2.10^{-3}$mol.l^{-1}.
Neutralité ionique : $[(C_2H_5)_2NH_2^+] + [H_3O^+] = [OH^-]$, or $[H_3O^+]$ négligeable devant $[OH^-]$.
Alors : $[(C_2H_5)_2NH_2^+] \simeq [OH^-] =$ **$3,2.10^{-3}$mol.l^{-1}**.
Comme Ka $= \frac{[(C_2H_5)_2NH].[H_3O^+]}{[(C_2H_5)_2NH_2^+].}$
D'où $[(C_2H_5)_2NH] = Ka.\frac{[(C_2H_5)_2NH_2^+]}{[H_3O^+]}$, avec Ka $= 10^{-pKa}$
= **10^{-2}mol.l^{-1}**
Conservation de la matière :
$C = [(C_2H_5)_2NH_2^+] + [(C_2H_5)_2NH]$
D'où $C = 1,32.10^{-2}$mlo.l^{-1}

Exercice résolu 11

Dans un bécher contenant 15cm^3 d'une solution aqueuse d'acide méthanoïque HCOOH, on verse progressivement une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium à 10^{-1} mol.l^{-1}. On mesure le pH de la solution à divers étapes de la manipulation. La variation du pH en fonction du volume V de la solution hydroxyde de sodium versé est donnée par la courbe suivante.



1- Ecrire l'équation bilan de la réaction qui se produit dans le bécher.

2- **Donner la valeur approchée de la concentration de la solution aqueuse d'acide méthanoïque initiale.**
3- **Donner la valeur approchée du pKa du couple acide/base correspondant à l'acide méthanoïque**

Solution

1- Equation bilan :
$HCOOH + OH^- ---\rightarrow HCOO^- + H_2O$.

2- Valeur approchée de la concentration de la solution aqueuse d'acide méthanoïque :
A l'équivalence $n_A = n_B$
La détermination de V_{BE} se fait par la méthode de la tangente (voir cours)
$C_A.V_A = C_B.V_{BE}$
Alors : $C_A = \frac{C_B.V_{BE}}{V_A}$
AN
$C_A = \frac{0,1.30}{15}$
$= 2.10^{-1}mol.l^{-1}$.

3- Valeur approchée du pKa du couple $HCOOH/HCOO^-$
$pKa = pH(V_{BE}/2) = 3,9$ (projection sur la courbe de pH en fonction de V_B)

Exercice résolu 12

Toutes les solutions sont à 25°C. On utilise une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène de concentration molaire C_A=1,0.10^{-1}mol.l^{-1} pour doser, à l'aide d'un pH-mètre, V_B=20cm^3 d'une solution de diéthylamine contenu dans un bécher. On note la variation du pH lors de l'addition de volume V_A de la solution de chlorure d'hydrogène à la solution de diéthylamine. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

V_A (cm^3)	0	1	3	5	7	9	11	13	15	16
pH	11,9	11,7	11,5	11,3	11,1	10,9	10,7	10,4	10,1	9,7

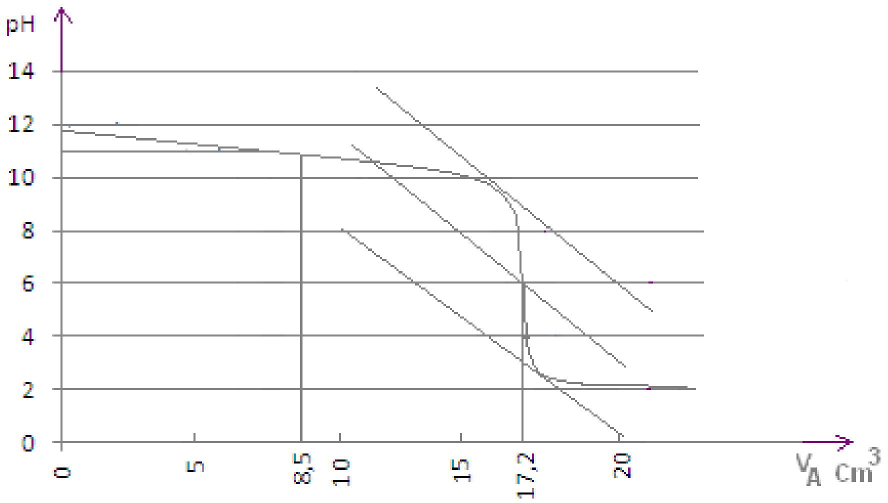
16,5	17	17,2	17,5	18	18,5	19	20	22	25
9,4	8,8	7,5	3,6	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8

1) **Ecrire l'équation bilan de la réaction acide base qui s'est produite.**
2) **Représenter graphiquement : pH=f(V_A).**
3) **Déduire de la courbe :**
a) **La valeur de la concentration molaire C_B de la solution aqueuse de diéthylamine.**
b) **Le pK_a du couple acide/base.**

Solution

1) L'équation bilan s'écrit : $(C_2H_5)_2NH + H_3O^+ \longrightarrow (C_2H_5)_2\overset{+}{N}H_2 + H_2O$

2) La courbe de pH=f(V_A) est représentée ci-dessous :



3) a- A l'équivalence, on détermine sur la courbe V_{AE} = 17,2Cm^3

à ce point, $C_A.V_{AE} = C_B.V_B$

d'où : $C_B = \frac{C_A.V_{AE}}{V_B}$

$= 10^{-1}.\frac{17,2}{20} = 8,6.10^{-2}$ mol.l^{-1}

b- à la demi-équivalence (quand les approximations $[H_3O^+]$ et $[OH^-]$ négligeables devant C_A et C_B sont applicables), pH = pKa.

$\frac{V_{AE}}{2} = 8,6\ Cm^3$ et la projection du point de demi-équivalence sur l'axe du pH donne :

$\boldsymbol{pKa = 11,0}$.

<u>Exercice résolu 13</u>

L'ammoniac NH_3 est une base faible, son acide conjugué est l'ion ammonium NH_4^+ .

1- **Ecrire l'équation de dissolution de l'ammoniac dans l'eau.**
2- **Une solution aqueuse d'ammoniac de concentration molaire C = 10^{-2} mol/l a un pH=10,6.**
   Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans cette solution et en déduire le pKa du couple NH_4^+/NH_3.
3- **La phénophtaléine est un indicateur coloré qui met en jeu le couple Acide/Base :**
   HInd/Ind$^-$ dont le pKa est 8,9. HInd est incolore et Ind$^-$est rose.
   Une solution aqueuse apparaît incolore si $\frac{[HInd]}{[Ind^-]}$
   Les valeurs du pH qui délimite la zone de virage de la phénolphtaléine ?
   4 - On ajoute quelques gouttes de phénolphtaléine à une autre solution aqueuse d'ammoniac.
   Quelle doit être la concentration molaire minimale C' de cette solution pour qu'elle prenne la teinte rose de la phénophtaléine .
   On donne :log1,25=0,1 ; log2,5=0,4 ;log4=0,4 ; log5=0,7 ; log6=0,8 log8=0,9 .

Solution

1- La réaction de NH_3 dans l'eau : $NH3 + H_2O \longrightarrow NH_4^+ + OH^-$
2- la concentrations molaires des espèces chimiques présentes :
- Les ions sont : NH_4^+ , H_3O^+ et OH^-
- Les molécules sont : H_2O et NH_3.

D'après la définition de pH : $[H_3O^+] = 10^{-10,6} = 2,51.10^{-11}$ mol.l^{-1}.

Produit ionique de l'eau : $[OH^-] = \frac{10^{-14}}{2,51.10^{-11}} = 4.10^{-4}$ mol.l^{-1}

Neutralité : $[H_3O^+] + [NH_4^+] = [OH^-]$, avec $[H_3O^+] << [OH^-]$,

D'où : $[NH_4^+] \simeq [OH^-] = 4.10^{-4}$ mol.l^{-1}.

Conservation de la matière: $C = [NH_4^+] + [NH_3]_{restant}$, alors : $[NH_3]_{restant} = C - [NH_4^+]$.

$[NH_3]_{restant} = 10^{-2} - 4.10^{-4} = 9,6.10^{-3}$ mol.l^{-1}.

On en déduit Ka $= \frac{[NH_3].[H_3O^+]}{[NH_4^+]}$

$$Ka = \frac{9,6.10^{-3}.2,51.10^{-11}}{4.10^{-4}} = 6,02.10^{-10}$$

D'où pKa = -log Ka

pKa = 10 – log 6,02 = 9,2

pKa = 9,2

3- Le phénophtaléine de pKa = 8,9

Hind est incolore et Ind$^-$ est rose :

$Ka_i = \frac{[Ind^-].[H_3O^+]}{[HInd]}$ d'où $[H_3O^+] = Ka_i.\frac{[HInd]}{[Ind^-]}$ avec $Ka_i = 10^{-pKai} = 1,25.10^{-9}$

a) $[H_3O^+]_1 = Ka_i.(\frac{[HInd]}{[Ind^-]})_1 = 1,25.10^{-9}.8 = 10^{-8}$

D'où pH = - log 10^{-8} = 8

b) $[H_3O^+]_2 = Ka_i.(\frac{[HInd]}{[Ind^-]})_2 = 1,25.10^{-9}.10^{-1} = 1,12.10^{-10}$

D'où pH = - log $1,12.10^{-10}$= 9,9

Conclusion : les valeurs de pH qui délimitent la zone de virage pour le phénolphtaléine sont **8 et 9.9**

pH = 9,9 l'indicateur coloré prend la teinte rose.

$[H_3O^+] = 10^{-9,9} = 1,25.10^{-10}$ mol.l^{-1}

$[OH^-] = 8.10^{-5}$ mol.l^{-1}

$[NH_4^+] = [OH^-] = 8.10^{-5}$ mol.l^{-1}

$pH = pKa + \log\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}$

$\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]} = 10^{-(pH-pKa)}$.

$[NH_3] = [NH_4^+].10^{-(pH-pKa)}$.

$= 8.10^{-5}\ 10^{-(9,9-9,2)}$

$= 1,6.\ 10^{-5}$ mol.l^{-1}.

Conservation de la matière :

$C' = [NH_3] + [NH_4^+]$.

$C' = 1,6.\ 10^{-5} + 8.10^{-5}$

C'= **9,6.10^{-5} mol.l^{-1}**

EXERCICES

Exercice 1

On considère de l'eau pure à 50°C ($Ke(50°C) = 5,5.10^{-14}$)

1) Quelle est la valeur du pKe à cette valeur ?
2) Quelles sont les valeurs des concentrations molaires des ions H_3O^+ et OH^- ?
3) Quel est le pH de l'eau à cette température ?

Exercice 2

Calculer les concentrations molaires en ions H_3O^+ et OH^- dans les solutions suivantes à 25°C.

1) Jus de citron (pH = 2,2) ;
2) Lait de vache (pH = 6,5) ;
3) Solution de lessive (pH = 11,5).

Exercice 3

On introduit 10^{-3}mole d'acide nitrique dans 100mL d'eau. Le pH de cette solution est égal à 2.

1) En déduire les concentrations molaires des différentes espèces présentes, autres que l'eau, à l'état d'équilibre et l'équation- bilan de la réaction de l'acide nitrique sur l'eau.
2) Quelles sont les espèces majoritaire, minoritaire ou ultra minoritaire dans ce milieu ?
3) On ajoute à la solution précédente 100mL de solution d'acide chlorhydrique de concentration 10^{-2} mol.L^{-1}.

Quelle est la valeur du pH de ce mélange ?

Exercice 4

Une solution d'acide chlorhydrique a un pH égal à 2,4. On veut préparer à partir de cette solution une solution ayant un pH égal à 3.

Quel volume d'eau faut – il ajouter à 1litre de la solution initiale d'acide chlorhydrique ?

Exercice 5

On introduit 10g d'un mélange d'hydroxyde de sodium et de chlorure de sodium dans 10L d'eau. Le pH de la solution est égal à 11.

1) Donner la composition en grammes de ce mélange à l'état initial.

2) Calculer les concentrations molaires des espèces présentes en solution autres que l'eau dans la solution.

Exercice 6

Compléter le tableau suivant qui concerne cinq échantillons de 50 millilitres de solutions aqueuses différentes contenues dans des béchers à la température ordinaire

pH	5,0				
$[H_3O^+]$ mol.L^{-1}		$6{,}00.10^{-12}$			
Nombre de moles d'ions H_3O^+				$5{,}0.10^{-5}$	
$[OH^-]$ mol.L^{-1}			$2{,}0.10^{-9}$		
Nombre de moles d'ions OH^-					$8{,}0.10^{-10}$

Exercice 7

On ajoute, à 90mL de solution d'acide chlorhydrique de concentration 10^{-3} mol.L^{-1}, 10 mL de solution d'hydroxyde de sodium à 10^{-1}mol.L^{-1}.

Calculer les concentrations molaires de différentes espèces présentes, autres que l'eau, dans le mélange.

Exercice 8

L'acide éthanoïque s'ionise partiellement dans l'eau. Sa solution de concentration 10^{-1}mol.L^{-1} a un pH égal à 2,4.

1. Quelles sont les réactions chimiques qui ont lieu dans l'eau lors de dissolution de CH_3CO_2H ?
2. Quelles sont les concentrations molaires des différentes espèces, autres que l'eau, à l'état d'équilibre ?
3. Calculer les concentrations molaires de ces espèces chimiques.
4. Dresser un tableau classant les différentes espèces : majoritaires, minoritaire et ultra minoritaires

Exercice 9

Une solution de méthanoate de sodium HCO_2Na de concentration molaire initiale Co = 10^{-1}mol.L^{-1} a un pH égal à 8,4.

1. Calculer les concentrations molaires des différentes espèces présentes, autres que l'eau, dans la solution à l'état d'équilibre.
2. Dresser un tableau classant les différentes espèces majoritaire, minoritaires et ultra minoritaire.

Exercice 10

1. On mesure le pH d'une solution aqueuse d'acide éthanoïque (acide acétique) de molarité 10^{-1}mol.L^{-1}. On trouve pH = 2,9

à 25°C. Calculer les concentrations molaires des espèces en solution autres que l'eau.

2. Quel est le coefficient d'ionisation de l'acide éthanoïque dans cette solution.

3. On dispose de 10mL de la solution précédente. On la dilue à 1litre. Le pH prend la valeur 3,9.

Répondre aux mêmes questions qu'en 1.et 2.et conclure.

Exercice 11

Quel volume de chlorure d'hydrogène gazeux faut – t – il dissoudre dans 10L d'eau à 25°C pour obtenir une solution de pH = 1,5 ? A 25°C, le volume molaire vaut 24,5L /mol.

Exercice 12

1. On dilue 100 fois une solution d'acide fort. De combien varie son pH ?

2. Même question pour une solution de base forte.

Exercice 13

On dispose, à 25°C, de quatre solutions d'hydroxyde de sodium A, B, C et D :

A a un pH = 11,6 ; B est telle que $[OH^-] = 3.10^{-3}$molL-1 ; C a été obtenue par dissolution de 2g d'hydroxyde de sodium dans 10L d'eau ; D a été obtenue par addition de 400mL d'eau à 100mL de solution d'hydroxyde de sodium de pH = 12,1.

Calculer le pH des solutions B, C et D et classer ces quatre solutions par basicité croissante.

On donne : M(Na) = 23g.mol^{-1} ; M(O) = 16g.mol^{-1} ; M(H) = 1g.mol^{-1}

Exercice 14

Une solution d'acide chlorhydrique a un pH = 2,6.

1. A l'aide de cette solution, on souhaite préparer 2 litres de solution ayant un pH = 3. Quel volume V_A de la solution acide est – il nécessaire ?

2. Quel volume de gaz chlorhydrique faut – il dissoudre dans 2 litres d'eau pure pour obtenir la même solution acide ?

Donnée : Volume molaire 24L /mol

Exercice 15

L'étiquette d'un flacon d'acide chlorhydrique commercial porte les indications suivantes :

Densité (par rapport à l'eau) : 1,18 ; Pourcentage en masse 35% d'acide pur HCl.

1. Déterminer la concentration molaire de la solution commerciale.

2. On veut préparer 1L d'une solution à 1mol /L d'acide chlorhydrique par dilution d'un volume V d'acide commercial. Déterminer V.

Exercice16

1. Un flacon commercial de 1L de soude de densité 1,33 par rapport à l'eau contient en masse 30% de soude pure. Quelle est la concentration de la soude commerciale ?

2. On veut préparer 1L d'une solution de soude de pH = 12,4. Quel est le volume V de solution commerciale nécessaire ?

Exercice 17

On mesure le pH de 100mL d'acide éthanoïque de concentration $C_1 = 5.10^{-2}$mol /L. On trouve $pH_1 = 3,0$. On ajoute alors 900mL d'eau à la solution précédente. On homogénéise et on mesure à nouveau le pH. On trouve $pH_2 = 3,5$.

1. Montrer que l'acide éthanoïque est un acide faible. Écrire l'équation chimique traduisant l'ionisation de cet acide dans l'eau.

2. Calculer, dans chaque cas, le degré d'ionisation de l'acide éthanoïque dans l'eau. Le degré d'ionisation est – il une grandeur caractéristique de l'acide ?

3. Calculer, dans chaque cas, la quantité d'acide éthanoïque ionisé. En déduire l'effet de la dilution.

Exercice 18

Les pH des solutions aqueuses basiques à $1,0.10^{-1}$mol /L et à $1,0.10^{-2}$mol /L d'ammoniac sont respectivement 11,1 et 10,6.

1. Montrer que l'ammoniac est une base faible.

2. Calculer, dans chaque cas, le facteur de dissociation ionique de l'ammoniac.

3. Calculer, dans chaque cas, la quantité d'ammoniac ionisé dans l'eau. En déduire l'effet de la dilution.

Exercice 19

Une solution aqueuse d'acide méthanoïque a été obtenue en dissolvant 1centimol de cet acide dans 1L d'eau. Dans les conditions de l'expérience, 125molécules sur 1000 sont ionisées. Calculer la concentration en ions H_3O^+ et le pH de cette solution.

Exercice 20

On mesure le pH de 50mL d'une solution aqueuse d'éthylamine à 0,01mol /L ; on trouve $pH_1 = 11,3$. On ajoute 450mL d'eau à la solution précédente. On homogénéise et on mesure à nouveau le pH ; on trouve $pH_2 = 10,8$.

1. L'ionisation de l'éthylamine $C_2H_5NH_2$ dans l'eau est – elle totale ou partielle ? Justifier.

2. Écrire l'équation d'ionisation de l'éthylamine dans l'eau.

3. Calculer, dans chaque cas, la quantité d'éthylamine ionisé et conclure quand à l'effet de la dilution.

Exercice 21:

Dans 500mL d'eau pure, on dissout une masse de 0,73g de chlorure d'hydrogène.

1. Quel est le volume de gaz dissout ? Écrire l'équation – bilan de l'ionisation du chlorure d'hydrogène dans l'eau.

2. Quel est le pH de la solution obtenue ?

3. Calculer la concentration de toutes les espèces chimiques présentes, autres que l'eau, dans la solution à 25°C.

Données : Vm = 24L/mol ; $M_H = 1$g /mol ; $M_{Cl} = 35,5$g /mol

Exercice 22

Une solution d'hydroxyde de potassium KOH de concentration $5,0.10^{-4}$mol /L a un pH = 10,7

1. Montrer qu'il s'agit d'une base forte.

2. Calculer la concentration de toutes les espèces chimiques présentes en solution et le coefficient d'ionisation de KOH.

Exercice 23

1. En procédant par analogie avec l'acide éthanoïque, écrire l'équation – bilan de la réaction entre l'acide faible

CH_2Cl-COOH et l'eau.

2. Montrer qu'il s'agit d'une réaction acido – basique. L'eau joue – t – elle, dans cette réaction, le rôle d'un acide ou

d'une base ?

Exercice 24

Une solution d'acide méthanoïque de molarité 10^{-2}mol /L a un pH = 2,9.

1. Montrer que l'acide méthanoïque est un acide faible.

2. Calculer le coefficient d'ionisation α de l'acide méthanoïque.

Exercice 25

On considère une solution aqueuse d'acide dichloroéthanoïque $CHCl_2COOH$, de concentration molaire égale à 10^{-1}mol/L.

1. Écrire les équations – bilans des réactions acido-basiques après avoir définies les couples Acide/Base présents dans cette solution.

2. Le pH de la solution est 1,3. Calculer les concentrations molaires des diverses espèces chimiques, autres que l'eau, à l'état d'équilibre. Établir le tableau précisant les espèces majoritaires, minoritaires et ultra – minoritaires.

Exercice 26

Une solution aqueuse d'ammoniac de concentration molaire 10^{-3}mol /L a un pH = 10,1.

1. Démontrer que NH_3 est une base faible. Écrire l'équation – bilan de sa réaction sur l'eau.

2. Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes, autres que l'eau, dans la solution.

3. Calculer le Ka et le pKa du couple NH_4^+/ NH_3

Exercice 27

Dans 0,5L d'eau pure, on fait dissoudre de la soude jusqu'à ce que son pH soit égal à 12,6. Le volume de la solution reste égal à 0,5L.

1. Calculer la concentration molaire de chaque ion présent dans la solution et en déduire la masse de soude dissoute.

Données : Na : 23 ; O : 16 ; H : 1

2. Quel volume d'eau faudrait – il ajouter à la solution pour que son pH soit égal à 12.

3. A 20mL de cette solution de pH = 12, on ajoute 5mL d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration molaire inconnue C_a. Le pH du mélange devient 11,6. Calculer C_a.

Exercice 28

A 20mL d'une solution de soude de pH = 12, on ajoute 5,0mL d'acide chlorhydrique de concentration molaire inconnue C. Le pH de ce mélange est 11,6.

1. Écrire l'équation – bilan de la réaction qui se produit lors du mélange de ces deux solutions.

2. Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans ce mélange. En déduire C et le pH de l'acide utilisé.

3. Quel volume de la solution d'acide chlorhydrique faut –il ajouter au mélange pour obtenir l'équivalence, c'est – à – dire, pour faire disparaître totalement la quantité de soude initialement présente.

Exercice 29

On prépare 1litre de solution aqueuse en dissolvant 0,20mole de méthylamine CH_3NH_2. Le pH est égal à 12.

1. Montrer que le méthylamine est une base faible ? Écrire l'équation chimique traduisant son ionisation dans l'eau.

2. Recenser les espèces chimiques présentes en solution, puis calculer leurs concentrations molaires respectives

3. Calculer la constante d'acidité Ka et le pKa du couple $CH_3NH_3^+$ /CH_3NH_2

Exercice 30

Une solution de chlorure d'ammonium NH_4Cl, de concentration C = 0,05mol /L a un pH = 5,3. NH_4Cl a une structure ionique.

Calculer les concentrations des espèces chimiques en solution et les classer en espèces majoritaires, minoritaires, et ultra – minoritaires.

En déduire la constante d'acidité Ka et le pKa du couple NH_4^+ /NH_3

Exercice 31

Un acide faible HA a une concentration molaire C. Montrer que l'on peut exprimer la constante d'acidité Ka du couple

HA /A^- en fonction de C et du coefficient d'ionisation α de cet acide.

Exercice 32

Dans un bécher, on introduit 20mL d'une solution de triméthylamine de formule brute $(CH_3)_3N$. Son acide conjugué est l'ion triméthylammonium.

A l'aide d'une burette graduée, on ajoute progressivement un volume v d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration molaire c = 0,1mol/L. A l'aide d'un pH – mètre, on suit l'évolution du pH. On obtient le tableau de mesure suivant :

v(mL	0	0,5	2	4	6	8	10	11	11,5	12	12,5	13	14	16	18
pH	11,3	10,9	10,4	10,1	9,8	9,5	9,2	9	8,8	5,6	2,5	2,1	1,7	1,4	1,2

1. Tracer la courbe traduisant la variation du pH en fonction du volume v d'acide chlorhydrique
Echelles: 1cm pour 1mL
1cm pour 1 unité de pH

2. Déduire de la courbe la concentration molaire de la solution de triméthylamine et le pKa du couple ion triméthylammonium/ triméthylamine

3. Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution quand on a versé 6mL d'acide dans
le bécher.

Exercice 33

Une solution d'hélianthine met en jeu le couple Acide – Base $HIn/\ In^-$ dont le pKa est 3,5 ; HIn et In^- n'ont pas la même couleur ; HIn est rose et In^- est jaune. Cette solution apparaît rose si $[HIn] / [In^-] \geq 3$ et jaune si $[In^-] / [HIn] \geq 10$

1. Quelles sont les valeurs du pH délimitant la zone de virage de cet indicateur coloré ?
2. La valeur de la constante pKa du couple acide éthanoïque/ ion éthanoate est 4,7. On ajoute quelques gouttes d'hélianthine à

une solution aqueuse S d'acide éthanoïque. Cette addition ne modifie pratiquement pas le pH. Quelle doit être la concentration molaire C_a de la solution S.

3. Quelle masse m d'hydroxyde de sodium faut – il ajouter à 1litre de cette solution S pour que l'hélianthine prenne la teinte de sa forme basique ?

Exercice 34

1. Une solution aqueuse S_1d'éthanoate de sodium, de concentration $C_1 = 0,10$ mol /L a un pH égal à 8,9.

   A quelle réaction est due la valeur de ce pH ?

   Quelles sont les concentrations, en mol/L, des espèces chimiques présentes dans la solution ? En déduire la constante d'acidité Ka et le pKa du couple acide éthanoïque/ ion éthanoate.
2. Quel volume d'hydroxyde de sodium, de concentration $C'_2 = 0,05$mol /L faut – il verser dans $10,0cm^3$ d'une solution S_2

d'acide éthanoïque de concentration $C_2 = 0,10$mol /L pour obtenir un pH égal au pKa calculé ci – dessus ? Quelle propriété la solution obtenue possède – t – elle ?

3. En vue d'obtenir une solution de pH = 4,5, on mélange un volume v_2 de la solution S_2 de concentration $C_2 = 0,10$mol /L et

un volume $v_1 = 10cm^3$ de la solution S_1 d'éthanoate de sodium de concentration $C_1 = 0,10$mol /L. Exprimer les concentrations molaires des ions sodium, des ions éthanoate et des molécules acides non ionisés dans la solution S en fonction de C_1, C_2, v_2, v_1. Les concentrations en ions H_3O^+ et OH^- sont négligeables. En déduire v_2 pour avoir un pH = 4,5 pour la solution S.

Exercice 35

On dose $10cm^3$ d'une solution d'acide benzoïque C_6H_5COOH de concentration inconnue par une solution de soude de concentration molaire $1,0.10^{-1}$mol/L. Les variations de pH en fonction de v de la solution de soude versée sont :

v (cm^3)	0	1	2	3	5	6	8	9	9,5	9,8	9,9	10	10,1	11
pH	2,6	3,25	3,6	3,85	4,2	4,4	4,8	5,15	5,5	5,9	6,2	8,45	10,7	11,7

1. Tracer la courbe pH = f (v)
2. Déterminer graphiquement les caractéristiques du point d'équivalence et en déduire la concentration de l'acide.
3. En justifiant la réponse, déterminer la valeur de la constante pKa du couple Acide/ Base. En déduire la constante d'acidité Ka de ce couple.
4. Pour un volume v =$3cm^3$ de la solution de soude versée, calculer les concentrations des espèces chimiques présentes dans le milieu. Retrouver la valeur de pKa.
5. On dispose de deux indicateurs colorés : l'hélianthine (zone de virage : 3,2 – 3,4) et la phénolphtaléine (zone de virage : 8 – 10). Lequel de ces deux indicateurs faut – il utiliser pour effectuer le dosage ? Justifier.
6. Si le volume de la solution de soude versée était égal à $12cm^3$, quel serait le pH du mélange obtenu ?

Exercice 36

Un litre de solution aqueuse (S) a été obtenu en dissolvant dans l'eau une certaine quantité d'acide méthanoïque HCO_2H.

1. Écrire l'équation de la réaction entre l'acide méthanoïque et l'eau. Quelle est la base conjuguée de cet acide ?
2. Le pH de la solution est 2,7. Sachant que le pKa du couple HCO_2H /HCO_2^- est 3,8, calculer la concentration C de la solution (S).
3. On ajoute à la solution (S) une masse m d'hydroxyde de sodium (soude) pure, en négligeant la variation de volume. On obtient alors une solution (S').

   Écrire l'équation de la réaction de la réaction.

   Quelle doit être cette masse m pour que le pH de la solution (S') soit égal à 3,8 ?

   Cette solution (S') présente une propriété remarquable. Quelle est cette propriété ?

Données : Na = 23 g/mol ; O = 16 g/mol ; H = 1 g/mol

Exercice 37

1. Le pH d'une solution contenant 0,01 mole d'acide propanoïque par litre d'eau est 3,5. Calculer la constante d'acidité Ka du couple auquel appartient cet acide.
2. Le pH devient 1,2 lorsqu'à 10cm^3 de la solution précédente, on ajoute v cm^3 d'une solution contenant 0,1 mole d'acide chlorhydrique par litre. Quel est le volume d'acide ajouté ?
3. A 10cm^3 de la solution 0,01 mol /L d'acide propanoïque, on ajoute un volume v d'une solution contenant 0,15 mol /L de soude ; le pH est devenu 13. Quel est le volume de la solution de soude ajouté ?

Exercice 38 (bac C 2009)

Deux solution acides ont la même concentration molaire C = 10^{-2}mol. l^{-1}.

S_1 est une solution d'acide chlorhydrique HCl de $pH_1 = 2,0$.

S_2 est une solution d'acide méthanoïque HCOOH de $pH_2 = 2,9$.

1) Après avoir calculé les concentrations des ions H_3O^+ de S_1 et de S_2, démonter que l'une des solutions est une solution d'acide faible et l'autre une solution d'acide fort.
2) Vérifier par calcul que la constante pKa du couple correspondant à l'acide méthanoïque est égale à 3,74.
3) Les solutions S_1 et S_2 ont maintenant le même volume $V = 10^{-2} l$. On veut obtenir deux solutions S_1' et S_2' de même pH = 3,4 en ajoutant respectivement dans S_1 et S_2 des volumes d'eau V_1 et V_2.
   Soit V_1' le volume de S_1' et V_2'celui de S_2'.

   Déterminer V_1, V_2, V_1' et V_2'.

Exercice 39 (bac D 2009)

La température des liquides est 25°C.

On neutralise 10cm^3 d'une solution d'éthylamine $C_2H_5NH_2$ par une solution d'acide chlorhydrique de concentration 10^{-1} mol. L^{-1}. Il a fallu 8,3 cm^3 d'acide pour atteindre le point d'équivalence. On a remarqué les points suivants :

V_A	0	4,15	8,3
pH	11,8	10,8	6,6

1- Donner l'équation- bilan de la réaction acide-base et le pKa du couple $C_2H_5NH_3^+/C_2H_5NH_2$.
2- Calculer la concentration de la solution basique.
3- Pour $V_A = 0$, calculer les concentrations des espèces chimiques présentes dans la solution.